

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - SETOR DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ENGENHARIA - PPGMNE

CAMILA FRANCISCA DE MELO

**AVALIAÇÃO COMPARATIVA DA HOMOGENEIZAÇÃO DE
MORI-TANAKA UTILIZANDO O TENSOR DE ESHELBY EM
MATERIAIS BIFÁSICOS COM DIFERENTES FORMATOS DE
INCLUSÃO**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2015

CAMILA FRANCISCA DE MELO

**AVALIAÇÃO COMPARATIVA DA HOMOGENEIZAÇÃO DE
MORI-TANAKA UTILIZANDO O TENSOR DE ESHELBY EM
MATERIAIS BIFÁSICOS COM DIFERENTES FORMATOS DE
INCLUSÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia”, área de concentração em Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marco André Argenta

CURITIBA

2015

M528a

Melo, Camila Francisca de

Avaliação comparativa da homogeneização de mori-tanaka utilizando o tensor de eshelby em materiais bifásicos com diferentes formatos de inclusão/
Camila Francisca de Melo. – Curitiba, 2015.
98 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,
Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2015.

Orientador: Marco André Argenta .

Bibliografia: p. 87-91.

1. Materiais compostos - Propriedades mecânicas. 2. Mecânica analítica.
3. Mecânica dos meios contínuos. 4. Elasticidade.. I. Universidade Federal do
Paraná. II.Argenta, Marco André. III. Título.

CDD: 620.118

MODELO DE ERRATA¹

MELO, Camila Francisca de. **Avaliação comparativa da homogeneização de Mori-Tanaka utilizando o Tensor de Eshelby em materiais bifásicos com diferentes formatos de inclusão**. 2015. 98 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. Defesa: Curitiba, 11/08/2015.

ERRATA

FOLHA	LINHA / ILUSTRAÇÃO	ONDE SE LÊ	LEIA-SE
86	8	CORDEIRO, M. F. Um estudo do método de homogeneização assintótica visando aplicações em estruturas ósseas . Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, 2009.	Silva, U. P. Um estudo do método de homogeneização assintótica visando aplicações em estruturas ósseas . Dissertação (Mestrado) — Bioengenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. doi:10.11606/D.82.2009.tde-02092010-094935.

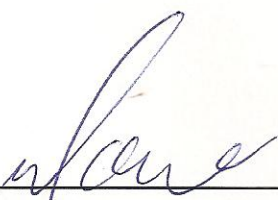
¹ Modelo retirado de: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. **Teses, dissertações, monografias e trabalhos acadêmicos**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007. (Normas para apresentação de documentos científicos, 2).

TERMO DE APROVAÇÃO

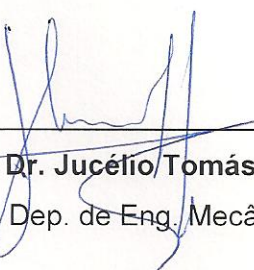
CAMILA FRANCISCA DE MELO

AVALIAÇÃO COMPARATIVA DA HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA UTILIZANDO O TENSOR DE ESHELBY EM MATERIAIS BIFÁSICOS COM DIFERENTES FORMATOS DE INCLUSÃO

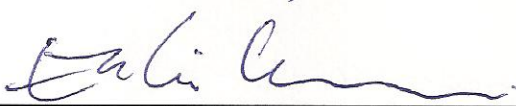
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Marco André Argenta
Orientador - Membro do PPGMNE/UFPR.



Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira
Membro do Dep. de Eng. Mecânica da UFPR



Prof. Dr. Emílio Graciliano Ferreira Mercuri
Membro do PPGMNE/UFPR

Curitiba, 11 de agosto de 2015

AGRADECIMENTOS

- À Deus, que foi e sempre será a base e a força da minha vida e de todas as minhas conquistas.
- Aos meus pais, Rosa Francisca da Cruz e João Francisco de Melo, que torcem, incentivam e rezam, me apoiando em cada obstáculo e comemorando cada conquista.
- A minha irmã, Rita de Cássia de Melo e ao meu namorado Cezar Augusto Guimarães Marzani, que foram grandes incentivadores nessa jornada.
- Aos colegas da Turma 2013, que foram responsáveis por tornar as aulas mais descontraídas, assumindo, algumas vezes, o papel de professores nos corredores do Cesec ou nas redes sociais, esclarecendo várias dúvidas nos momentos das atividades extra classe.
- Aos professores que contribuíram com a minha formação, aprimorando o conhecimento de forma clara e objetiva, sendo acessíveis, responsáveis e fundamentais para o entendimento dos conteúdos apresentados.
- Ao meu orientador, Marco André Argenta, que se mostrou muito prestativo e atencioso em todos os momentos que precisei de sua ajuda, tornando-se assim, figura indispensável para a conclusão desse trabalho.
- Ao professor José Martim Nicoladelli, que foi a primeira pessoa à acreditar no meu trabalho e me incentivar.
- A todos os amigos que tiveram alguma participação de forma direta ou indireta na elaboração deste trabalho.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo incentivo financeiro.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

RESUMO

Materiais formados a partir de dois ou mais constituintes são chamados compósitos. Nesta dissertação são considerados compósitos bifásicos idealizados, denominando a fase imersa como inclusão e a fase que a envolve de matriz. Este estudo tem como objetivo avaliar o comportamento de inclusões com diferentes formatos contidas em uma matriz finita, aplicando a teoria do Tensor de Eshelby para representar a geometria das inclusões e o Método de Mori-Tanaka para obter o tensor constitutivo homogeneizado com diferentes condições de contorno para os casos bidimensionais e tridimensionais. Para isso, simulações computacionais foram realizadas tanto em estruturas homogeneizadas quanto em estruturas com matrizes e inclusões explícitas. Um algoritmo em linguagem *Python* foi desenvolvido para determinar o Tensor de Eshelby e as propriedades homogeneizadas do material bifásico idealizado. As discretizações de ambas as estruturas em elementos finitos foram efetuadas por meio do *software Ansys*. Foram realizados quatro testes computacionais com diferentes condições de apoio e força aplicadas; o primeiro teste consiste no engastamento de uma das extremidades da estrutura e a aplicação de um carregamento distribuído na face (caso tridimensional) ou aresta (caso bidimensional) oposta, simulando uma deformação axial ou ensaio de tração; no segundo teste as duas extremidades são engastadas e o carregamento distribuído é aplicado na face (caso tridimensional) ou aresta (caso bidimensional) superior, simulando um ensaio de flexão duplamente engastado; no terceiro, é representada uma viga em balanço, ou seja, uma extremidade engastada e um carregamento distribuído na face (caso tridimensional) ou aresta (caso bidimensional) superior; o quarto teste reproduz um ensaio de compressão, com engaste de uma das extremidades da estrutura e na aplicação de um carregamento distribuído na face ou aresta oposta. A comparação dos resultados obtidos mostrou que o método de homogeneização utilizado é representativo para a maioria dos modelos propostos. Variações de erro relativo percentual ocorrem quando modificadas as condições de contorno. Nas simulações dos ensaios de tração e compressão foram encontrados os menores erros percentuais, inferiores a 1% na maioria dos casos. As simulações dos ensaios de flexão apresentaram os maiores erros percentuais, acima de 0,9% na maioria dos casos, sendo que a simulação do ensaio flexão biengastado resultou no maior erro percentual de aproximadamente 1,6%. A modificação dos formatos das inclusões gerou resultados distintos, em especial aquelas com formato poligonal, com aumento de erro em torno de 0,3% se comparado a aproximação encontrada com outros formatos. A partir desses resultados é possível avaliar a influência das condições de apoio e do formato das inclusões na resposta do método de homogeneização, os quais podem ser utilizados, por exemplo, para ajustar valores encontrados na utilização do método de homogeneização.

Palavras-chave: Material Bifásico. Tensor de Eshelby. Homogeneização. Métodos Numéricos.

ABSTRACT

Materials made by two or more constituents are called composite. On this dissertation, it was considered idealized biphase composites, named, in the immersed phase, as inclusion and in the involving phase as matrix. This study has as aim to evaluate the behavior of different format inclusions, contained in a finite matrix, through the apply of the Eshelby's inclusion theory, to represent the inclusion geometry, and the Mori-Tanaka Method to obtain the homogenized constitutive tensor with different boundary conditions for two-dimensional and tri-dimensional cases. To achieve this, computational simulations were made on homogenized structures and explicit inclusions as well. An algorithm made in *Python* language was developed to determine the Eshelby's Tensor and the homogenized properties of the idealized biphase material. The discretizations of both structures on finite elements were made through the *Ansys software*. It was completed by four computational tests, with different support conditions and applied forces; the first test consisted on a cantilever installed at one of the structure's extremities and the apply of a distributed load on its face, or opposite edge, simulating an axial deformation or traction test; on the second test, both extremities had cantilevers and the distributed load is applied on the face or top edge, simulating an flexion test double-cantilever; on third test, it is represented a supported beam, in which it was, one extremity cantilever and a distributed load on face or top edge; The fourth and last test reproduces a compression test, with a cantilever on one of the extremities of the structure and on the apply of a distributed load on the face or opposite edge. The comparison of the obtained results showed that the used homogenized method is representative for the proposed models, on its majority. Variations on percentage error occurs when the boundaries conditions are changed. On traction and compression simulations were found the lowest percentage errors, lower than 1% on its majority. The flexion simulations presented the highest percentage errors, above 0,9%, on its majority, considering that the double-cantilever flexion simulation resulted on the highest percentage error of about 1,6%. The format modification of inclusions generated on distincts outcomes, specially the ones with polygonal format, with an error increasis in of 0,3% if compared to the found approximation with other formats. From this results, it's possible to evaluate the support conditions influences, and the inclusions format on the answer to the homogenization method, which can be used, for example, to adjust analytical values obtained.

Keywords: Biphase Material. Eshelby's Tensor. Homogenization. Numerical Methods.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– EXEMPLOS DE INCLUSÕES: (a) FIBRAS DE COLÁGENO ÚMIDAS (INCLUSÃO) E HIDROXIAPATITA INTERFIBRILARES (MATRIZ), (b) COMPÓSITO (MATRIZ) REFORÇADO COM FIBRAS (INCLUSÃO) E (c) MASSA DE CONCRETO (MATRIZ) COM PEDRAS BRITAS (INCLUSÃO).	15
FIGURA 2	– SÓLIDO LINEAR DE DOMÍNIO D E SUBDOMÍNIO Ω	18
FIGURA 3	– FORÇA APLICADA NO PONTO \mathbf{x}' DENTRO DE UM CORPO ELÁSTICO.	20
FIGURA 4	– INCLUSÃO ESFÉRICA.	28
FIGURA 5	– FORMATO DA INCLUSÃO HEXAGONAL.	30
FIGURA 6	– MÉTODO DE MORI-TANAKA COM DUAS FASES	34
FIGURA 7	– COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY POLIGONAL (a) S_{1111} (b) S_{1122} (c) S_{2211} (d) S_{2222} (e) S_{1212}	38
FIGURA 8	– (a) PRIMEIRO TESTE BIDIMENSIONAL (b) PRIMEIRO TESTE TRIDIMENSIONAL	43
FIGURA 9	– (a) SEGUNDO TESTE BIDIMENSIONAL (b) SEGUNDO TESTE TRIDIMENSIONAL	44
FIGURA 10	– (a) TERCEIRO TESTE BIDIMENSIONAL (b) TERCEIRO TESTE TRIDIMENSIONAL	44
FIGURA 11	– (a) QUARTO TESTE BIDIMENSIONAL (b) QUARTO TESTE TRIDIMENSIONAL	45
FIGURA 12	– (a) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 60mm, (b) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 84,6mm, (c) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 120mm E (d) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 169,8mm.	49
FIGURA 13	– (a) MATRIZ DE LADO IGUAL A 60mm, (b) MATRIZ DE LADO IGUAL A 75,6mm.	51
FIGURA 14	– (a) MATRIZ DE LADO IGUAL A 95,4mm, (b) MATRIZ DE LADO IGUAL A 120mm E (c) MATRIZ DE LADO IGUAL A 151,2mm.	52
FIGURA 15	– CHAPA COM: (a) UMA INCLUSÃO ELÍPTICA, (b) UMA INCLUSÃO CIRCULAR E (c) UMA INCLUSÃO POLIGONAL.	53
FIGURA 16	– CHAPA COM: (a) DUAS INCLUSÕES ELÍPTICAS, (b) DUAS INCLUSÕES CIRCULARES E (c) DUAS INCLUSÕES POLIGONAIS.	53
FIGURA 17	– CHAPA COM: (a) TRÊS INCLUSÕES ELÍPTICAS, (b) TRÊS INCLUSÕES CIRCULARES E (c) TRÊS INCLUSÕES POLIGONAIS.	54
FIGURA 18	– CUBO COM: (a) UMA INCLUSÃO ELIPSOIDAL, (b) UMA INCLUSÃO ESFÉRICA E (c) UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA.	54
FIGURA 19	– SÓLIDO COM: (a) DUAS INCLUSÕES ELIPSOIDAIS, (b) DUAS INCLUSÕES ESFÉRICAS, (c) DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.	55
FIGURA 20	– SÓLIDO COM: (a) TRÊS INCLUSÕES ELIPSOIDAIS, (b) TRÊS INCLUSÕES ESFÉRICAS E (c) TRÊS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.	55
FIGURA 21	– MALHAS: (a) SEÇÃO DO SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO ELIPSOIDAL (b) MATRIZ QUADRADA COM UMA INCLUSÃO CIRCULAR (c).	57
FIGURA 22	– RESULTADOS CHAPA COM INCLUSÃO ELÍPTICA.	59
FIGURA 23	– RESULTADOS CHAPA COM INCLUSÃO CIRCULAR.	60

FIGURA 24 – RESULTADOS CHAPA COM INCLUSÃO POLIGONAL.	61
FIGURA 25 – RESULTADOS CHAPA COM DUAS INCLUSÕES ELÍPTICAS.	63
FIGURA 26 – RESULTADOS CHAPA COM DUAS INCLUSÕES CIRCULARES.	64
FIGURA 27 – RESULTADOS CHAPA COM DUAS INCLUSÕES POLIGONAIS.	65
FIGURA 28 – RESULTADOS CHAPA COM TRÊS INCLUSÕES ELÍPTICAS.	67
FIGURA 29 – RESULTADOS CHAPA COM TRÊS INCLUSÕES CIRCULARES.	68
FIGURA 30 – RESULTADOS CHAPA COM TRÊS INCLUSÕES POLIGONAIS.	69
FIGURA 31 – RESULTADOS SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO ELIPSOIDAL.	71
FIGURA 32 – RESULTADOS SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO ESFÉRICA.	72
FIGURA 33 – RESULTADOS SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA.	73
FIGURA 34 – RESULTADOS SÓLIDO COM DUAS INCLUSÕES ELIPSÓIDAIS.	74
FIGURA 35 – RESULTADOS SÓLIDO COM DUAS INCLUSÕES ESFÉRICAS.	76
FIGURA 36 – RESULTADOS SÓLIDO COM DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.	77
FIGURA 37 – RESULTADOS SÓLIDO COM TRÊS INCLUSÕES ELIPSÓIDAIS.	78
FIGURA 38 – RESULTADOS SÓLIDO COM TRÊS INCLUSÕES ESFÉRICAS.	80
FIGURA 39 – RESULTADOS SÓLIDO COM TRÊS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.	81

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO ELÍPTICA	36
TABELA 2	– TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO CIRCULAR	37
TABELA 3	– TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO ELIPSOIDAL	39
TABELA 4	– TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO ESFÉRICA	39
TABELA 5	– TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO CILÍNDRICA	40
TABELA 6	– CAMPOS	41
TABELA 7	– RESULTADOS 1 - TESTE BIDIMENSIONAL	47
TABELA 8	– RESULTADOS 1 - TESTE TRIDIMENSIONAL	47
TABELA 9	– RESULTADOS 2 - TESTE BIDIMENSIONAL	47
TABELA 10	– RESULTADOS 2 - TESTE TRIDIMENSIONAL	47
TABELA 11	– ANÁLISE DA FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CHAPA	50
TABELA 12	– ANÁLISE DA FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CUBO	51
TABELA 13	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ELIPSE ..	58
TABELA 14	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA CIRCULAR	60
TABELA 15	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM POLÍGONO	61
TABELA 16	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ELIPSES	62
TABELA 17	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS CIRCULARES	63
TABELA 18	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS-DOIS POLÍGONOS	65
TABELA 19	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELÍPTICAS	66
TABELA 20	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CIRCULARES	67
TABELA 21	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS-TRÊS POLÍGONOS	69
TABELA 22	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM ELIPSOIDE	70
TABELA 23	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ESFERA .	71
TABELA 24	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM CILINDRO	72
TABELA 25	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS ELIPSOIDES	74
TABELA 26	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ESFERAS	75
TABELA 27	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS CILINDROS	77
TABELA 28	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELIPSOIDES	78
TABELA 29	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ESFERAS	79
TABELA 30	– RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CILINDROS	80
TABELA 31	– MALHAS REFENTE A FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CHAPA	92
TABELA 32	– MALHAS REFENTE A FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CUBO	92
TABELA 33	– MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - CIRCULAR	93
TABELA 34	– MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - ELÍPTICA	93
TABELA 35	– MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - POLIGONAIS	93

TABELA 36	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS CIRCULARES	93
TABELA 37	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ELIPSES	94
TABELA 38	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS POLÍGONOS ..	94
TABELA 39	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CIRCULARES .	94
TABELA 40	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELIPSES	94
TABELA 41	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS POLÍGONOS ..	95
TABELA 42	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ESFERA	96
TABELA 43	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ELIPSOIDE ...	96
TABELA 44	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM CILINDRO	96
TABELA 45	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ESFERAS	96
TABELA 46	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ELIPSOIDES .	97
TABELA 47	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS CILINDROS ...	97
TABELA 48	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ESFERAS	97
TABELA 49	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELIPSOIDES ..	97
TABELA 50	–	MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CILINDROS ...	98

LISTA DE SÍMBOLOS

- ε_{ij}^* - Tensor perturbação no campo de deformação;
- Ω - Inclusão (subdomínio);
- σ_{ij} - Tensor de tensões;
- ε_{ij} - Tensor de deformações;
- u_i - Tensor de deslocamentos;
- $x (x_1, x_2, x_3)$ - Ponto arbitrário;
- e_{ij} - Tensor de deformações elásticas;
- C_{ijkl} - Tensor constitutivo de rigidez;
- n_j - Vetor externo normal;
- X_i - Força de corpo;
- $G_{lp}(x - x')$ - Tensor de Green;
- $\delta(x - x')$ - Tensor de Dirac;
- δ_{ij} - Delta de Kronecker;
- μ - Módulo de cisalhamento;
- ν - Coeficiente de Poisson;
- S_{ijkl} - Tensor de Eshelby;
- λ - Constante de Lamé;
- χ - Superfície externa do compósito;
- ε^0 - Tensor constante de deformação;
- σ^0 - Tensor constante de tensão;

- $\bar{\epsilon}^i$ - Tensor de deformação médio da inclusão;
- $\bar{\epsilon}^m$ - Tensor de deformação médio da matriz;
- $\bar{\sigma}^i$ - Tensor de tensão médio da inclusão;
- $\bar{\sigma}^m$ - Tensor de tensão médio da matriz;
- f_i - Fração volumétrica da inclusão;
- f_m - Fração volumétrica da matriz;
- C^{MT} - Tensor constitutivo do Método de Mori-Tanaka;
- C_m - Tensor constitutivo de rigidez da matriz;
- C_i - Tensor constitutivo de rigidez da inclusão;
- A - Tensor fator de concentração;
- S - Tensor de Eshelby;
- I - Tensor identidade de quarta ordem;
- L - Tensor conformidade do Método de Mori-Tanaka;
- L_m - Tensor conformidade da matriz;
- L_i - Tensor conformidade da inclusão;

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 OBJETIVOS	15
1.1.1 Objetivo Geral	15
1.1.2 Objetivos Específicos	15
1.2 RELEVÂNCIA DO TRABALHO	16
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2 REVISÃO DA LITERATURA	18
2.1 PROBLEMA DA INCLUSÃO	18
2.1.1 Função de Green	20
2.1.2 Métodos dos Elementos Finitos	22
2.2 INCLUSÃO EQUIVALENTE DE ESHELBY	22
2.2.1 Tensor de Eshelby	23
2.2.1.1 Tensores de Eshelby Tridimensionais	24
2.2.1.2 Tensores de Eshelby Bidimensionais	29
2.3 HOMOGENEIZAÇÃO	31
2.3.1 Método de Mori-Tanaka	32
3 VALIDAÇÃO	36
3.1 VALIDAÇÃO TENSORES DE ESHELBY BIDIMENSIONAIS	36
3.2 VALIDAÇÃO TENSORES DE ESHELBY TRIDIMENSIONAIS	39
3.3 VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA	40
4 MATERIAIS E MÉTODOS	42
4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	42
4.1.1 Simulação do Ensaio de Tração	43
4.1.2 Simulação do Ensaio de Flexão Biengastado	43
4.1.3 Simulação de um ensaio de Flexão em Balanço	44
4.1.4 Simulação de um Ensaio de Compressão	45
4.2 DEFINIÇÃO DOS MATERIAIS DO COMPÓSITO BIFÁSICOS IDEALIZADOS	45
4.2.1 Simulação - Materiais da inclusão e matriz com rigidez iguais	46
4.2.2 Simulação - Material da inclusão mais rígido do que o da matriz	46
4.2.3 Simulação - Material da matriz mais rígido do que o da inclusão	47
4.3 FRAÇÕES DE ÁREA E FRAÇÕES VOLUMÉTRICAS	48
4.4 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS	52
4.5 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS	53
4.6 MÉTODOS UTILIZADOS	55
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS	57
5.1 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS COM ÚNICA INCLUSÃO	58
5.2 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS COM DUAS INCLUSÕES	62
5.3 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS COM TRÊS INCLUSÕES	66
5.4 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS COM ÚNICA INCLUSÃO	70
5.5 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS COM DUAS INCLUSÕES	73
5.6 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS COM TRÊS INCLUSÕES	77

6	DISCUSSÕES	82
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
8	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	86
	REFERÊNCIAS	87
	Apêndice A – MALHAS GERADAS - FRAÇÃO VOLUMÉTRICA	92
	Apêndice B – MALHAS GERADAS - BIDIMENSIONAIS	93
	Apêndice C – MALHAS GERADAS - TRIDIMENSIONAIS	96

1 INTRODUÇÃO

Compósitos são materiais formados por dois ou mais materiais com propriedades mecânicas distintas, denominados fases (ARAÚJO, 2012). Têm como objetivo aprimorar a rigidez, peso, resistência à corrosão, dureza, condutividade, entre outras propriedades físicas (DUTRA, 2014), por meio da combinação das propriedades de seus constituintes. O resultado é um material com propriedades superiores (ARAÚJO, 2012), decorrentes de fatores como a geometria das fases, distribuição, orientação e compatibilidade interfacial dos materiais utilizados.

O objeto de estudo deste trabalho resume-se a problemas envolvendo compósitos bifásicos, caracterizados pela existência de um meio, denominado matriz, que engloba um material em seu interior, chamado inclusão. Esses compósitos são utilizados, por exemplo, na representação das propriedades do osso trabecular, Figura 1 (a); para reforçar um material utilizando fibras, Figura 1 (b) e concreto com pedras britas, Figura 1 (c).

Eshelby (1957) propôs um método que tem por finalidade encontrar o campo elástico de uma inclusão elipsoidal em um sólido (denominado Problema da Inclusão (LI et al., 2007), (ZHOU et al., 2013)), quando a região inclusa sofre uma deformação homogênea uniforme, isto é, uma variação de forma e tamanho gerada por uma perturbação no campo de deformações¹, tal como expansão térmica, transformação de fase ou deformação inicial.

Na solução do Problema de Inclusão apresentada por Eshelby, um tensor de quarta ordem denominado Tensor de Eshelby, fornece uma ligação direta entre a deformação em um material elástico isotrópico e homogêneo de dimensões infinitas e a perturbação no campo de deformações (GAO; MA, 2009). Esse tensor é fundamentado na teoria da elasticidade clássica e depende das constantes elásticas e do formato da inclusão (TSVELODUB, 2010).

Este trabalho resolve o Problema da Inclusão utilizando o Método de Homogeneização de Mori-Tanaka, função das frações volumétricas, tensores constitutivos de rigidez, tanto da matriz quanto das inclusões, além do Tensor de Eshelby (JÚNIOR, 2008), (ALEJANDRO, 2012).

¹ Perturbações no campo de deformações podem ser encontradas na literatura como *eigenstrain* (MURA, 1987 apud ARGENTA, 2011).

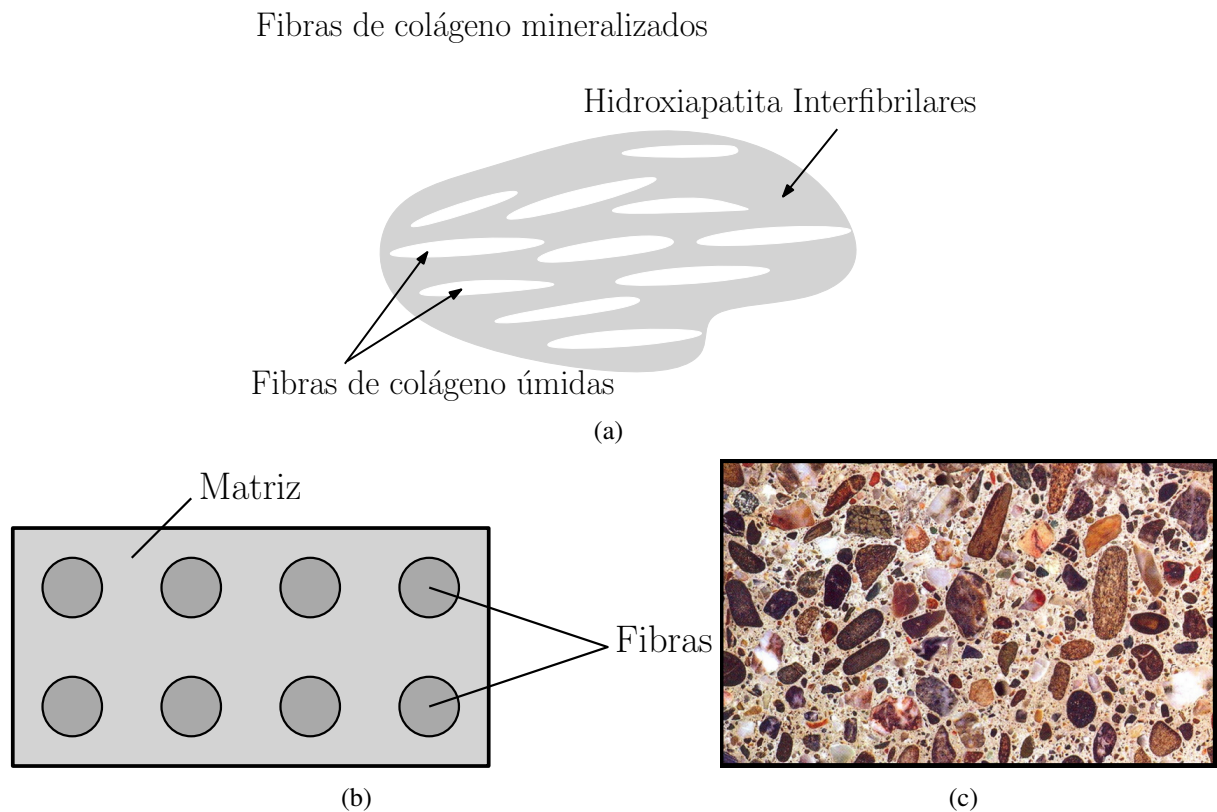


Figura 1- EXEMPLOS DE INCLUSÕES: (a) FIBRAS DE COLÁGENO ÚMIDAS (INCLUSÃO) E HIDROXIAPATITA INTERFIBRILARES (MATRIZ), (b) COMPÓSITO (MATRIZ) REFORÇADO COM FIBRAS (INCLUSÃO) E (c) MASSA DE CONCRETO (MATRIZ) COM PEDRAS BRITAS (INCLUSÃO).

FONTE: O autor (2015) Adaptado de Argenta (2011), O autor (2015), Teixeira (2011)

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é avaliar o comportamento de inclusões de diferentes formatos em compósitos bifásicos com matriz e inclusões isotrópicas e homogêneas, utilizando o Método de Homogeneização de Mori-Tanaka, com diferentes condições de contorno, submetidos a esforços axiais e transversais em estruturas idealizadas bidimensionais e tridimensionais.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Gerar os modelos geométricos bidimensionais e tridimensionais de estruturas compostas pelos materiais bifásicos idealizados com diferentes condições de apoio (contorno) e esforços tanto axiais quanto transversais.
- Obter os valores das componentes do Tensor de Eshelby para os diferentes formatos da

inclusão;

- Obter o tensor constitutivo homogeneizado do compósito bifásico idealizado por meio do Método de Homogenização de Mori-Tanaka;
- Resolver a equação de equilíbrio para os modelos propostos por meio de elementos finitos com o auxílio do *software Ansys*.
- Comparar as respostas mecânicas das estruturas homogeneizadas com as estruturas explícitas dos modelos idealizados.

1.2 RELEVÂNCIA DO TRABALHO

A modelagem multiescala é importante para o desenvolvimento de novos materiais e o seu aprimoramento. Segundo Zhou et al. (2013), inclusões podem gerar danos pois, durante o processo de fabricação de novos materiais ou de seu aprimoramento, as mesmas podem causar microdefeitos, uma vez que, frequentemente essas inclusões concentram campos de tensões na sua vizinhança, onde trincas podem se formar. Por outro lado, a composição de diferentes materiais pode reforçar sua estrutura, melhorar suas características mecânicas, aumentar sua resistência, rigidez e/ou durabilidade. Desta maneira, é importante conhecer as interações entre as inclusões e o meio, visando melhorar a qualidade do material.

Com o propósito de homogeneizar o tensor constitutivo, isto é, determinar a rigidez mecânica aproximada do compósito, levando em conta as propriedades de todos os materiais que o constituem em um único tensor constitutivo (ARAÚJO, 2012), são utilizados os métodos de homogeneização. Tais métodos são definidos como uma técnica de modelagem matemática para descrever o comportamento de materiais heterogêneos, pela obtenção do tensor constitutivo equivalente à rigidez do material heterogêneo (KUZNETSOV, 2012).

Diversos estudos foram realizados para compreender o comportamento de compósitos com inclusões utilizando técnicas de homogeneização. Dutra (2012) estuda o concreto reforçado com fibras de aço, visando reduzir a quantidade de armadura transversal (estribos) utilizada e reduzir a deformação por fluência de estruturas de concreto. Alejandro (2012) aborda um modelo tridimensional de prótese do ombro humano. Lorenci (2013) aplica o conceito de mudança escalar em um meio rochoso heterogêneo para o estudo do comportamento hidráulico mecânico nos meios porosos.

A relevância deste trabalho está na análise do comportamento de diversos formatos de inclusões com diferentes condições de contorno e carregamentos, utilizando o Método de

Homogeneização de Mori-Tanaka em casos bidimensionais e tridimensionais. Essa análise permite observar a aproximação do método quando variam-se os formatos das inclusões e aplicam-se diferentes condições de contorno na matriz. As estruturas utilizadas nos testes são modelos idealizados, isto é, constituídos por estruturas regulares, de modo que seja possível uma avaliação mais precisa das condições pré-estabelecidas.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação encontra-se estruturada em sete capítulos. No Capítulo 1 é apresentado o tema estudado, os objetivos e a relevância deste trabalho.

No Capítulo 2, é realizada uma revisão de literatura definindo o Problema da Inclusão, a Inclusão Equivalente de Eshelby, juntamente com uma abordagem dos Tensores de Eshelby e por fim a homogeneização, com o Método de Homogeneização de Mori-Tanaka.

No Capítulo 3, são apresentadas as validações dos algoritmos em linguagem *Python* dos Tensores de Eshelby e do método de homogeneização.

O Capítulo 4 descreve as estruturas idealizadas abordadas neste trabalho, bem como a metodologia utilizada nas simulações computacionais, uma análise da fração volumétrica e dos materiais utilizados.

No Capítulo 5, os resultados computacionais obtidos para os compósitos homogeneizados e heterogêneos são exibidos e comparados. Também estão contidos neste capítulo, análises gráficas e percentuais, avaliando os valores encontrados.

O Capítulo 6 e 7 apresentam as discussões e considerações finais do trabalho, além das recomendações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DA LITERATURA

A revisão bibliográfica contém o Problema da Inclusão, a Função de Green, o Método dos Elementos Finitos, o conceito e uma introdução à homogeneização, assim como a descrição do Método de Homogeneização de Mori-Tanaka que é aplicado no trabalho.

2.1 PROBLEMA DA INCLUSÃO

O Problema da Inclusão tem desempenhado um papel fundamental em muitos modelos da micromecânica, incluindo compósitos, mecânica da fratura, entre outros (ZOU; ZHENG, 2012). Esse problema é caracterizado por uma deformação livre de tensão, denominada perturbação no campo de deformações ε_{ij}^{*1} , que é disposta ao longo de um subdomínio Ω (inclusão) bidimensional ou tridimensional de um corpo elástico remanescente (matriz) (MURA, 1987), como pode ser observado na Figura 2. A determinação dos campos de deformação e tensão devido à perturbação no campo de deformações sobre um subdomínio, pode ser resolvido pelo Problema da Inclusão de Eshelby (ZOU et al., 2010).

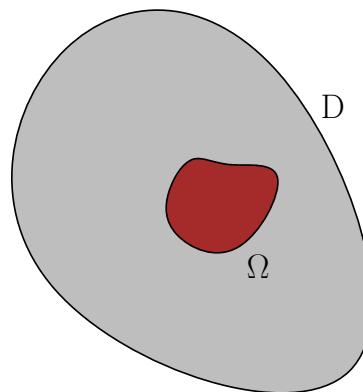


Figura 2- SÓLIDO LINEAR DE DOMÍNIO D E SUBDOMÍNIO Ω .

Os campos de tensão σ_{ij} e deformação ε_{ij} tanto dentro como fora da inclusão podem ser obtidos em função dos deslocamentos u_i . Neste trabalho serão consideradas deformações infinitesimais e de acordo com Timoshenko e Goodier (1951), o campo de pequenas deformações

¹Os subíndices nas nomenclaturas e nas equações existem, pois, em todo o trabalho é utilizado notação indicial, que pode ser encontrada na literatura também como notação de Voigt.

totais de um ponto arbitrário $x (x_1, x_3, x_3)$ pode ser definido da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

onde $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

De acordo com Mura (1987), para compósitos, as deformações totais ε_{ij} podem ser escritas através da soma de deformações elásticas e_{ij} com a perturbação no campo de deformações ε_{ij}^*

$$\varepsilon_{ij} = (e_{ij} + \varepsilon_{ij}^*). \quad (2)$$

Com o auxílio da Lei de Hooke Generalizada, tem-se a relação entre deformação elástica e a tensão, por meio do tensor constitutivo de rigidez C_{ijkl}

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*). \quad (3)$$

ou, como C_{ijkl} é simétrico no caso de materiais isotrópicos, estudados neste trabalho, ou seja, $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, tem-se que $C_{ijkl} u_{k,l} = C_{ijkl} u_{l,k}$. Assim

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (u_{k,l} - \varepsilon_{kl}^*). \quad (4)$$

Levando em conta as condições de equilíbrio e as condições de contorno para uma superfície livre de forças externas, tem-se

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (5)$$

e

$$\sigma_{ij} n_j = 0. \quad (6)$$

onde n_j é o vetor externo normal ao contorno de D . Substituindo a Equação 4 nas Equações 5 e 6, resulta:

$$C_{ijkl} u_{k,l,j} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^* \quad (7)$$

e

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* n_j. \quad (8)$$

Observando a perturbação no campo de deformações ε_{ij}^* nas equações de equilíbrio, percebe-se uma equivalência entre esse comportamento e uma força de corpo, sendo a força de corpo X_i , com zero ε_{ij}^* o equilíbrio é dado por $C_{ijkl}u_{k,lj} = X_i$. Da mesma forma, $C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^*n_j$ é equivalente a uma força de superfície no contorno. Essas considerações permitem a equivalência entre o campo elástico formado pela ε_{ij}^* em um corpo livre, equivalendo a força de corpo a $-C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j}^*$ e a força de superfície a $C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^*n_j$ (MURA, 1987).

A perturbação no campo de deformação pode ser representada por meio de funções, tais como polinomiais, trigonométricas ou valores constantes. Diferentes representações da perturbação foram estudadas por Kubo et al. (1999), que analisa um método para estimar a distribuição da perturbação no campo de deformação nos sólidos, através da divisão desta perturbação em componentes compatíveis e incompatíveis. Já Rahman (2002) determina o campo de deformações dentro de uma inclusão elipsoidal isotrópica com a perturbação no campo de deformações caracterizada por um polinômio de ordem arbitrária. Ma et al. (2011) estuda casos bidimensionais com perturbação no campo de deformação polinomial, abordando diferentes condições de contorno.

2.1.1 FUNÇÃO DE GREEN

Em um corpo elástico infinito, o equilíbrio pode ser escrito utilizando a Função de Green. Essa função definida pelo tensor $G_{lp}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ (denominado Tensor de Green) é conhecida como solução fundamental, representa a componente de deslocamento de um ponto qualquer \mathbf{x} na direção l , devido a uma força concentrada atuando em \mathbf{x}' na direção p , em um material de dimensões infinita (Figura 3). A função apresentada depende apenas da distância relativa entre o ponto \mathbf{x}' de aplicação da força e o ponto \mathbf{x} (WEINBERGER et al., 2005); (MERCURI, 2013).

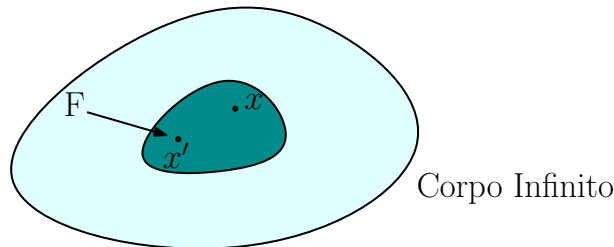


Figura 3- FORÇA APLICADA NO PONTO \mathbf{x}' DENTRO DE UM CORPO ELÁSTICO.
FONTE: Adaptado de Weinberger et al. (2005)

Escrevendo a equação de equilíbrio em função da força de corpo $X_m(\mathbf{x}) = \delta_{mk}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ e do Tensor de Green, obtêm-se (MURA, 1987).

$$C_{mnpq}G_{pk,qn}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \delta_{mk}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0 \quad (9)$$

sendo que $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ é a função generalizada Delta de Dirac, enquanto δ_{mk} é o delta de Kronecker. De acordo com Dvorak (2012), a Função de Green para materiais isotrópicos é dada pela seguinte expressão:

$$G_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \left\{ (3-4\nu)\delta_{kj} + \frac{(x_k-x'_k)(x_j-x'_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \right\} \quad (10)$$

onde μ e ν correspondem, respectivamente, ao módulo de cisalhamento e ao coeficiente de Poisson do material. Também, x'_k e x_k são as componentes do ponto \mathbf{x}' e \mathbf{x} , com $k = 1, 2, 3$ para formatos tridimensionais.

A expressão analítica exata da Função de Green existe apenas para casos isotrópicos e transversalmente isotrópicos (DVORAK, 2012).

O deslocamento u_k da Equação 7, pode ser entendido como um deslocamento gerado por uma força de corpo $-C_{klmn}\epsilon_{mn,l}^*$ na direção k . Assim, a solução para o deslocamento u_k , é o produto de G_{kj} com a força $-C_{jlmn}\epsilon_{mn,l}^*$ (MURA, 1987):

$$u_k(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') C_{jlmn}\epsilon_{mn,l}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (11)$$

Integrando por partes e assumindo que o termo do contorno é zero:

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} C_{jlmn}\epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{kj,l}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (12)$$

As expressões correspondentes para a deformação e tensão são dadas, respectivamente, como:

$$\epsilon_{kj}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ilmn}\epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \{ G_{ki,lj}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + G_{ji,lk}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \} d\mathbf{x}' \quad (13)$$

e

$$\sigma_{kj}(\mathbf{x}) = -C_{pqmn} \left\{ \int_{\Omega} C_{ilmn}\epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{ki,lj}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \epsilon_{il}^*(\mathbf{x}) \right\} \quad (14)$$

onde $G_{kj,l}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{\partial G_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial x_l} = -\frac{\partial G_{kj}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\partial x'_l}$.

Mura (1987) descreve com detalhes o processo para a obtenção das Equações 13 e 14.

2.1.2 MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente utilizado para a obtenção de resultados numéricos de equações diferenciais (ARNDT, 2009; BARROS, 2002; BATHE, 1996; BELYTSCHKO; FISH, 2007; HUGHES, 2000; TORII, 2012). É possível analisar o comportamento de sistemas físicos por equações diferenciais ou integrais, tais como da condução de calor e massa, da mecânica dos sólidos deformáveis e do eletromagnetismo, por exemplo (SORIANO, 2009).

O método é baseado na discretização do domínio o qual é subdividido em partes distintas ou em um número finito de elementos, conectados entre si por um pontos discretos chamado nós (ASSAN, 2003). O MEF utiliza funções aproximadoras, descritas nos subdomínios (ou elementos finitos), para caracterizar os campos de deslocamento da estrutura (SORIANO; LIMA, 2003). Essas funções aproximadoras são escritas de forma a facilitar a aplicação das condições de compatibilidade na fronteira.

2.2 INCLUSÃO EQUIVALENTE DE ESHELBY

Eshelby (1957) desenvolveu uma solução que permitiu acompanhar a evolução dos modelos capazes de satisfazer o equilíbrio local e garantir a compatibilidade de deformações (LORENCI, 2013).

Utilizando a teoria da elasticidade linear e as Funções de Green, Eshelby (1957) resolveu o problema da inclusão (MERCURI, 2013) e desenvolveu o Método da Inclusão Equivalente de Eshelby. O método baseia-se em extrair uma região do material (matriz), denominada inclusão equivalente, a qual sofre uma deformação livre de tensões ε^* , chamada de perturbação no campo de deformações (TEIXEIRA, 2011).

Essa inclusão retorna ao tamanho original após uma pressão superficial, de tal forma que é possível recolocá-la no espaço aberto na matriz depois da extração inicial, gerando assim uma forma contraída desta região. A tensão dessa inclusão pode ser obtida pela Equação 7, que por sua vez, pode ser obtida por meio da Lei de Hooke Generalizada e expressa em termos de (TEIXEIRA, 2011)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*). \quad (15)$$

Eshelby (1957) relacionou a forma contraída (deformação total) com a forma transformada (perturbação no campo de deformação) por intermédio de um tensor de quarta ordem

S_{ijkl} , denominado Tensor de Eshelby, para a solução no campo de deformações:

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^*. \quad (16)$$

Diversos trabalhos utilizam esta técnica. Yu et al. (1994) desenvolveu um vetor função-tensão aplicado para obter a forma fechada dos campos elásticos devido a uma inclusão em um sólido transversal isotrópico, sendo que a solução desenvolvida é uma extensão da solução de Eshelby para uma inclusão elipsoidal e o problema da heterogeneidade; Meng et al. (2012) trabalharam com inclusões elipsoidais em uma matriz infinita isotrópica com o auxílio do *software* MATLAB, para encontrar os campos elásticos por meio do Método da Inclusão Equivalente de Eshelby.

2.2.1 TENSOR DE ESHELBY

Eshelby (1957) descreve um método para obter os campos de tensões e deformações na inclusão e na matriz (MERCURI, 2013). Para isso, relaciona o campo de deformações restritas dentro da inclusão com as perturbações no campo de deformações de acordo com o Método da Inclusão Equivalente (MURA, 1987 apud ARGENTA, 2011); (LAI et al., 2009).

O tensor é definido como uma transformação linear entre dois tensores simétricos de deformação (ESHELBY, 1957). Esse tensor é baseado na teoria da elasticidade e depende das constantes elásticas e do formato geométrico da inclusão (TSVELODUB, 2010). E ainda deve respeitar as seguintes propriedades (TEIXEIRA, 2011):

- Em relação a uma base do tipo $(e_i \oplus e_j \oplus e_k \oplus e_l)_{i,j,k,l=1,2,3}$, ocorre simetria entre os dois primeiros índices e os dois últimos índices, respectivamente;

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}, \quad (17)$$

o que não pode ser considerado para o caso ij e kl :

$$S_{ijkl} \neq S_{klij}. \quad (18)$$

- Se o material da inclusão for homogêneo, o tensor de quarta ordem dependerá apenas do coeficiente de Poisson e dos parâmetros do formato da inclusão.

Eshelby (1957) mostrou que “o Tensor de Eshelby de uma inclusão elipsoidal em meio

a uma matriz homogênea infinita é constante, desde que os campos de tensão e deformação dentro da inclusão sejam uniformes”.

2.2.1.1 TENSORES DE ESHELBY TRIDIMENSIONAIS

Considerando uma *inclusão elipsoidal* Ω em um espaço elástico D , sujeito ao sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 , o formato dessa inclusão pode ocupar uma região de $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$, onde $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, representam os semieixos do elipsoide com soma implícita nos índices repetidos.

O campo de deslocamentos, pode ser encontrado utilizando a Equação 12:

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} C_{jlmn} \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{ij,l}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (19)$$

No caso de materiais isotrópicos, o tensor constitutivo C_{jlmn} é dado por:

$$C_{jlmn} = \lambda \delta_{jl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{jn} \delta_{lm}) \quad (20)$$

onde λ é a constante de Lamé.

Considerando um ponto \mathbf{x} no interior da elipsoide e substituindo as Equações 10 e 20 na Equação 19, obtêm-se:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{-\epsilon_{jl}^*}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} g_{ijl}(k) \frac{dx'}{|x - x'|^2} \quad (21)$$

onde

$$g_{ijl}(\mathbf{k}) = (1 - 2\nu) (\delta_{ij} k_l + \delta_{il} k_j - \delta_{jl} k_i) + 3k_i k_j k_l \quad (22)$$

e \mathbf{k} é um vetor unitário $\frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$.

O volume do elemento $d\mathbf{x}'$ na Equação 21 pode ser escrito como:

$$d\mathbf{x}' = dr r^2 d\omega$$

onde $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ e $d\omega$ é a superfície de uma esfera unitária (Σ) centrada no ponto \mathbf{x} . Assim, a Equação 21 pode ser reescrita na forma:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{-\epsilon_{jl}^*}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} r(\mathbf{k}) g_{ijl}(\mathbf{k}) d\omega \quad (23)$$

onde $r(\mathbf{k})$ é a raiz positiva de

$$\frac{(x_1 + rk_1)^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 + rk_2)^2}{a_2^2} + \frac{(x_3 + rk_3)^2}{a_3^2} = 1 \quad (24)$$

que é

$$r(\mathbf{k}) = \frac{-f}{g} + \left(\frac{f^2}{g^2} + \frac{e}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

com

$$g = \frac{k_1^2}{a_1^2} + \frac{k_2^2}{a_2^2} + \frac{k_3^2}{a_3^2}$$

$$f = \frac{k_1 x_1}{a_1^2} + \frac{k_2 x_2}{a_2^2} + \frac{k_3 x_3}{a_3^2} \quad (26)$$

$$e = 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}$$

Sabendo que, de acordo com Mura (1987), $\left(\frac{f^2}{g^2} + \frac{e}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$ pode ser omitido, desde que g_{ijl} seja ímpar, escrevendo

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{a_1^2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{a_2^2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{k_3}{a_3^2}, \quad (27)$$

tem-se o campo de deslocamentos:

$$u_i(\mathbf{x}) = \frac{x_m \epsilon_{jl}^*}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\lambda_m g_{ijl}}{g} d\omega. \quad (28)$$

Analogamente, as componentes de deformação da Equação 13 são reescritas como:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_{mn}^*}{16\pi(1-\nu)} \int_{\Sigma} \frac{\lambda_i g_{jmn} + \lambda_j g_{imn}}{g} d\omega. \quad (29)$$

Isolando a Perturbação no Campo de Deformação e modificando os índices da equação 29 chega-se ao Tensor de Eshelby. As componentes do Tensor de Eshelby diferentes de zero, são determinadas com as seguintes equações (TSVELODUB, 2010):

$$S_{kkkk} = Qa_k^2 I_{kk} + RI_k \quad (30)$$

$$S_{kkll} = Qa_l^2 I_{kl} - RI_k \quad (31)$$

$$2S_{klkl} = 2S_{kllk} = Q(a_k^2 + a_l^2) I_{kl} + R(I_k - I_l) \quad (32)$$

onde

$$Q = \frac{3}{[8\pi(1-\nu)]} \quad (33)$$

$$R = \frac{(1-2\nu)}{[8\pi(1-\nu)]} \quad (34)$$

$$I_k = \int_{\Sigma} \frac{l_k^2}{a_k^2 g} d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a_k^2 + s) \Delta(s)} \quad (35)$$

$$I_{kk} = \int_{\Sigma} \frac{l_k^4}{a_k^4 g} d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a_k^2 + s)^2 \Delta(s)} \quad (36)$$

$$I_{ki} = \int_{\Sigma} \frac{l_k^2 l_i^2}{a_k^2 a_i^2 g} d\omega = \frac{2}{3} \pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{\infty} \frac{du}{(a_k^2 + s)(a_i^2 + s) \Delta(s)} \quad (37)$$

$$\Delta(s)^2 = (a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s) \quad (38)$$

com $(k, l = 1, 2, 3; k \neq l)$, enquanto que as componentes remanescentes são nulas, ou seja, $S_{klmn} = 0$, nesse caso estes subíndices não estão escritas em notação de Voigt.

As Equações 35, 36 e 37 podem ser expressas em função de integrais elípticas, escritas como (TSVELODUB, 2010):

$$I_1 = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} [F(\theta, r) - E(\theta, r)] \quad (39)$$

$$I_3 = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}} \left[\frac{a_2 (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}}{a_1 a_3} - E(\theta, r) \right] \quad (40)$$

onde

$$F(\theta, r) = \int_0^\theta \frac{dw}{(1 - r^2 \sin^2 w)^{1/2}} \quad (41)$$

$$E(\theta, r) = \int_0^\theta (1 - r^2 \sin^2 w)^{1/2} dw \quad (42)$$

e

$$\theta = \arcsen \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2}} \quad (43)$$

$$r = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}} \quad (44)$$

Essas relações, devem ser tais que:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi \quad (45)$$

$$3I_{11} + I_{12} + I_{13} = \frac{4\pi}{a_1^2} \quad (46)$$

$$3a_1^2 I_{11} + a_2^2 I_{12} + a_3^2 I_{13} = 3I_1 \quad (47)$$

$$I_{12} = \frac{I_2 - I_1}{(a_1^2 - a_2^2)} \quad (48)$$

Os Tensores de Eshelby para outros formatos tridimensionais são derivados da forma elipsoidal. Por exemplo para uma inclusão esférica considera-se os eixos $a_1 = a_2 = a_3 = a$ (Figura 4).

Para esse formato, têm-se as seguintes relações:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{4\pi}{3} \quad (49)$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = I_{12} = I_{23} = I_{31} = \frac{4\pi}{5a^2} \quad (50)$$

Com isso, as respectivas componentes do tensor diferentes de zero, são:

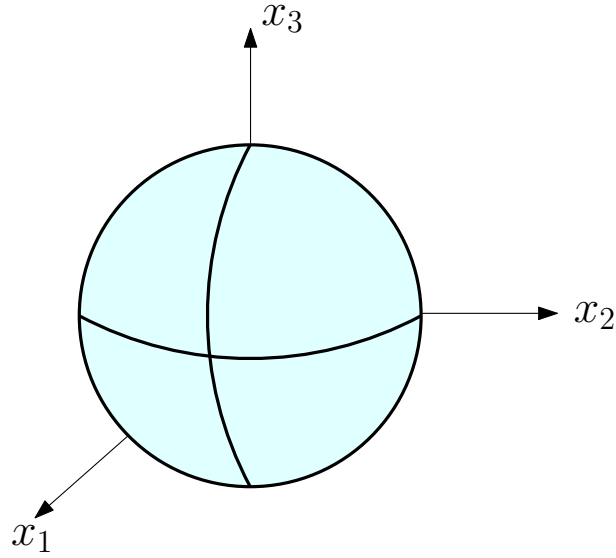


Figura 4- INCLUSÃO ESFÉRICA.

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{7 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \quad (51)$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311} = S_{1133} = S_{2211} = S_{3322} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \quad (52)$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)}. \quad (53)$$

Especialmente, para a inclusão esférica, o tensor de Eshelby possui uma expressão compacta:

$$S_{ijkl} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (54)$$

Uma particularidade deste formato de inclusão é que a expressão não depende do raio da esfera.

Para uma *inclusão no formato cilíndrico*, com $a_3 \rightarrow 0$, tem-se as seguintes componentes:

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{5 - 4\nu}{8(1 - \nu)} \quad (55)$$

$$S_{3333} = S_{3322} = S_{3311} = 0 \quad (56)$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{4\nu - 1}{8(1 - \nu)} \quad (57)$$

$$S_{1133} = S_{2233} = \frac{\nu}{2(1 - \nu)} \quad (58)$$

$$S_{2323} = S_{3131} = \frac{1}{4} \quad (59)$$

$$S_{1212} = \frac{3 - 4\nu}{8(1 - \nu)} \quad (60)$$

2.2.1.2 TENSORES DE ESHELBY BIDIMENSIONAIS

Os tensores de Eshelby para inclusões bidimensionais podem ser derivados da formulação tridimensional. Inclusões elipsoidais podem ser reescritas como elípticas, esféricas com circulares e assim por diante.

Considerando uma elipse que ocupa uma região definida por $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$, onde x_1 e x_2 são os semieixos e a_1 e a_2 são os raios da elipse; a formulação para obter o Tensor de Eshelby Elíptico difere apenas na variação dos subíndices, pois estes variam entre 1, 2. Como o desenvolvimento é análogo ao tridimensional, não se faz necessária a replicação.

As componentes do Tensor de Eshelby para as *inclusões no formato circular* decorrem do formato elíptico, sendo elas:

$$S_{1111} = S_{2222} = \frac{5 - 4\nu}{8(1 - \nu)} \quad (61)$$

$$S_{1122} = S_{2211} = \frac{4\nu - 1}{8(1 - \nu)} \quad (62)$$

$$S_{1212} = \frac{3 - 4\nu}{8(1 - \nu)} \quad (63)$$

Para a inclusão desse formato, o Tensor de Eshelby possui uma expressão compacta:

$$S_{ijmn} = \frac{4\nu - 1}{8(1 - \nu)} \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{3 - 4\nu}{8(1 - \nu)} (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn}). \quad (64)$$

O último formato bidimensional analisado no presente trabalho é o *poligonal*. De acordo com Kawashita e Nozaki (2001), a Equação 65 é a expressão exata do Tensor de Eshelby para inclusões poligonais convexas regulares:

$$S_{ijkl}(\mathbf{x}) = -\frac{C_{klmn}}{2} \int_{\Omega} [G_{il,kl}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + G_{jl,ki}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] d\mathbf{x}'. \quad (65)$$

Supondo o Tensor de Green bidimensional $G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ para o estado plano de deformação dado pela Equação 10:

$$G_{kj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \left\{ (3 - 4\nu)\delta_{kj} + \frac{(x_k - x'_k)(x_j - x'_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right\}. \quad (66)$$

Observando a Figura 5, é possível identificar que os vértices são caracterizados por A_p ($p = 1, 2, \dots, N$; onde N corresponde ao número total de arestas). Os lados $A_p A_{p+1}$ são representados por Γ_p e a p -ésima componente do vetor normal unitário do lado Γ_p é dada por $(\mathbf{n}^p)^T = (n_1^p, n_2^p)$ (XU; WANG, 2005).

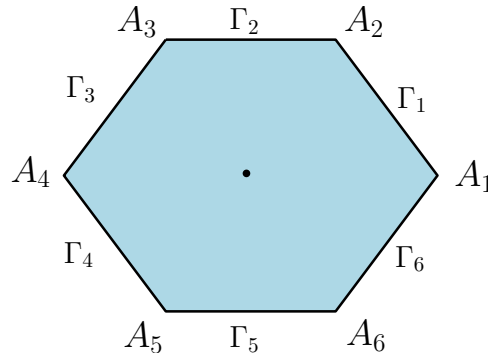


Figura 5- FORMATO DA INCLUSÃO HEXAGONAL.

FONTE: Adaptado (XU; WANG, 2005)

Assim, utilizando a Equação 66 na Equação 65 o Tensor de Eshelby é expresso por (XU; WANG, 2005):

$$S_{ijkl}(\mathbf{x}) = -\frac{C_{klmn}}{8\pi(1 - \nu)\mu} \{ 2J_{ijkl}(\mathbf{x}) - \delta_{ij} M_{lk}(\mathbf{x}) + (1 - 2\nu) [\delta_{il} M_{jk}(\mathbf{x}) + \delta_{jl} M_{ik}(\mathbf{x})] \} \quad (67)$$

onde

$$M_{ik}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^N \int_{\Gamma_p} \frac{x'_i - x_i}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2} n_k^p ds_{\mathbf{x}'} \quad (68)$$

e

$$J_{ijkl}(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^N \int_{\Gamma_p} \frac{(x'_i - x_i)(x'_j - x_j)(x'_l - x_l)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^4} n_k^p ds_{\mathbf{x}'}. \quad (69)$$

Desta maneira, o tensor S_{ijkl} da inclusão é dependente de $J_{ik}(\mathbf{x})$ e $J_{ijkl}(\mathbf{x})$.

Neste trabalho, os compósitos idealizados considerados são isotrópicos. Com isso, o tensor constitutivo de rigidez C_{klmn} tem o formato

$$C_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}). \quad (70)$$

Para este formato, Mura (1997) e Wulf et al. (1995) estudam inclusões poligonais e estrelas de seis pontos, Rodin (1996) emprega o algoritmo de Waldvogel e apresenta uma solução fechada do Tensor de Eshelby para inclusões poliédricas e poligonais. Em Nozaki e Taya (1997), analisado o campo elástico de uma inclusão poligonal convexa arbitrária em um meio infinito a partir da extensão do conhecimento utilizado no caso de uma inclusão elipsoidal. Kawashita e Nozaki (2001) verificam matematicamente as propriedades encontradas por Nozaki e Taya (1997) e, logo após, Xu e Wang (2005) acrescentam mais propriedades àquelas já encontradas em inclusões regulares poligonais.

Além das formulações do tensor exibidas acima, outras podem ser obtidas principalmente em Mura (1987) e Eshelby (1957). Tsvelodub (2010), calcula o inverso do Tensor de Eshelby sob a forma de esferoides oblato e prolato no espaço elástico isotrópico.

2.3 HOMOGENEIZAÇÃO

O comportamento das propriedades equivalentes dos compósitos é determinado por meio de técnicas de homogeneização (KUZNETSOV, 2012). Essencialmente, os métodos de homogeneização têm como objetivo representar as propriedades mecânicas equivalentes ou efetivas do material heterogêneo (LORENCI, 2013), considerando as características geométricas e mecânicas de todos os constituintes e suas distribuições no compósito (MA, 2010).

A diferença entre os métodos de homogeneização é a forma de determinar as interações entre as inclusões. Estas interações, influenciam o comportamento mecânico do compósito quando a fração volumétrica atinge um determinado valor (CAVALCANTE, 2006), (ALMEIDA

et al., 2010). Para determinar estas interações entre inclusões, pode-se utilizar uma matriz de deformação média.

Os métodos de homogeneização seguem alguns conceitos para a aproximação das propriedades efetivas dos compósitos, que são: estrutura fácil e descomplicada, que permite uma resolução explícita seguida de uma possível interpretação do desempenho físico de todos os seus constituintes; interação válida entre as fases do compósito para inclusões com diferentes geometrias, com comportamento isotrópico ou anisotrópico; uma construção teórica capaz de estimar a relevância das diferentes distribuições de inclusões e das interações multifásicas (ZHENG; DU, 2001 apud ARGENTA, 2011).

O Método de Homogeneização de Mori-Tanaka, utilizado nesta dissertação para o cálculo das propriedades efetivas do compósito, é constituído por uma combinação do conceito de matriz de tensão média com Inclusão Equivalente de Eshelby (BÖHM, 2010).

As propriedades homogeneizadas dos materiais heterogêneos são obtidas em função de condições sobre a geometria, por meio de quatro estratégias de solução (LORENCI, 2013):

- a) soluções analíticas exatas:** são possíveis apenas em meios com distribuição periódica de fibras e meios compósitos com juntas, onde estas são modeladas como interfaces;
- b) métodos numéricos:** só são aplicáveis quando a geometria do Elemento de Volume Representativo (EVR) ² é conhecida e ainda assim podem oferecer problemas de modelagem nas condições de contorno nos meios periódicos e dificuldades para geração de distribuições aleatórias em meios desordenados;
- c) limites variacionais:** são expressões analíticas aproximadas, baseadas em princípios energéticos;
- d) métodos das estimativas:** são também expressões analíticas aproximadas, baseadas no trabalho desenvolvido por Eshelby (1957) (LORENCI, 2013, pg.50).

2.3.1 MÉTODO DE MORI-TANAKA

O Método de Homogeneização de Mori-Tanaka é utilizado para a obtenção do tensor constitutivo efetivo (GOMMERS et al., 1998). Dentre as aplicações deste método, pode-se citar estudos sobre a dureza da cerâmica (FERNÁNDEZ, 2012); em materiais têxteis (GOMMERS et al., 1998); na biomecânica (CORDEIRO, 2009); na obtenção do módulo de elasticidade do concreto (BARBOSA, 2010), (BARBOSA et al., 2011); entre outros.

²EVR são pequenos elementos volumétricos que representam as propriedades do material e contém informações sobre a microescala. Esses elementos, deve ser suficientemente menor do que as dimensões estruturais macroscópicas (MORAES, 2014).

O método se baseia no campo médio em escala microscópica para estimar propriedades macroscópicas dos materiais (MORI; TANAKA, 1973). Posteriormente, a esse conceito foi incluído o Tensor de Eshelby (BENVENISTE, 1987). Com isso, foi possível analisar um compósito de N fases e aproximar o efeito da interação entre seus constituintes (ALMEIDA et al., 2010).

Para obter o tensor efetivo de Mori-Tanaka, admitem-se condições de fronteira homogêneas sobre os deslocamentos e tensões (KURUKURI, 2004):

$$\mathbf{u}(\chi) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \mathbf{x} \quad (71)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}(\chi) = \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{x} \quad (72)$$

onde \mathbf{u} e $\boldsymbol{\sigma}$ são respectivamente vetores de deslocamento e tensão, χ é a superfície externa do compósito e $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ e $\boldsymbol{\sigma}^0$ são tensores constantes de deformação e tensão.

Com isso, obtêm-se:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = f_{\mathbf{m}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{m}} + f_{\mathbf{i}} \left\{ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{i}} \right\} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad (73)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = f_{\mathbf{m}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{m}} + f_{\mathbf{i}} \left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{i}} \right\} = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (74)$$

sendo \mathbf{m} e \mathbf{i} os índices da matriz e inclusão respectivamente; f a fração volumétrica; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{i}}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{i}}$ os tensores de tensão e deformação médios dependentes da orientação da inclusão; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathbf{m}}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{m}}$ os valores médios para a matriz, e por fim $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ denotam-se por médias globais da deformação e da tensão (BENVENISTE, 1987).

O tensor efetivo constitutivo do Método de Mori-Tanaka, por meio da Lei de Hooke é considerado como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{MT} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (75)$$

e

$$\mathbf{C}^{MT} = \mathbf{C}_{\mathbf{m}} + f_{\mathbf{i}} \{ (\mathbf{C}_{\mathbf{i}} - \mathbf{C}_{\mathbf{m}}) \mathbf{A} \} \quad (76)$$

com $\mathbf{C}_{\mathbf{m}}$ e $\mathbf{C}_{\mathbf{i}}$ denominados tensores constitutivos de rigidez das fases (matriz e inclusão) e \mathbf{C}^{MT} tensor constitutivo do Método de Mori-Tanaka. O tensor \mathbf{A} é conhecido como “fator de concentração”, definido como (BENVENISTE, 1987):

$$\bar{\epsilon}^i = A \bar{\epsilon}^m \quad (77)$$

O tensor A , fator de concentração, pode ser obtido por meio de uma aproximação que ocorre no Método de Homogeneização de Dilute:

$$A = [I + S C_m^{-1} (C_i - C_m)]^{-1} \quad (78)$$

onde I e S são respectivamente Tensor Identidade e Tensor de Eshelby.

Devido ao uso do Método de Dilute, as interações entre partículas não são consideradas. Assim, a formulação é válida apenas para compósitos com inclusões que não estão em contato (KURUKURI, 2004):

Manipulando a Equação 76, considerando as equações 77 e 78, chega-se a:

$$C^{MT} = C_m + f_i (C_i - C_m) A (f_m I + f_i A)^{-1} \quad (79)$$

O inverso do Tensor de Mori-Tanaka Benveniste (1987) é conhecido como o Tensor Conformidade ³ L^{MT} :

$$L^{MT} = L_m + f_i \{ (L_i - L_m) W \} [f_m I + f_i A]^{-1} \quad (80)$$

onde L_m e L_i são conhecidos como tensores conformidade das fases (matriz e inclusão), L^{MT} é o tensor conformidade do Método de Mori-Tanaka e W é dado por:

$$W = C_i A L_m \quad (81)$$

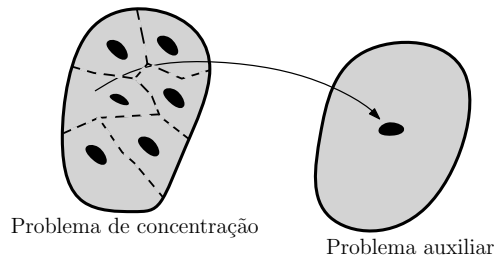


Figura 6- MÉTODO DE MORI-TANAKA COM DUAS FASES

FONTE: Adaptado de Lorenci (2013)

³O Tensor Conformidade L^{MT} pode ser encontrado na literatura como *Tensor Compliance* (BENVENISTE, 1987).

Esse método atende casos de inclusões imersas na matriz; nos quais a fração volumétrica das inclusões são consideradas (DVORAK, 2012). Por isso, a interação entre os subdomínios devem ser incorporados na formulação e dependendo da localização geométrica das heterogeneidades pode ocorrer anisotropia macroscópica (LORENCI, 2013). A Figura 6 ilustra o Método de Mori-Tanaka com duas fases, que corresponde à quantidade de fases utilizadas neste trabalho.

3 VALIDAÇÃO

Neste capítulo, os códigos gerados em linguagem *Python* para o cálculo dos Tensores de Eshelby para inclusões nos formatos descritos na seção 2.2.1 serão validados, por meio de comparações com valores encontrados na literatura.

3.1 VALIDAÇÃO TENSORES DE ESHELBY BIDIMENSIONAIS

Os formatos analisados para os casos bidimensionais foram o elíptico, o circular e o poligonal hexagonal regular. Para cada um desses formatos, um código diferente foi gerado e os formatos foram denominados respectivamente de T.Elíptico, T.Circular e T.Poligonal ¹.

Para o *formato elíptico* do Tensor de Eshelby, a Tabela 1 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo T.Elíptico com as componentes diferentes de zero determinadas por Chen (2014), utilizando Poisson igual a 0,3 e uma razão de $b/a = 0,5$; onde a e b são os raios da elipse.

Tabela 1- TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO ELÍPTICA			
Componente	Chen (2014)	T.Elíptico	Erro absoluto (%)
S_{1111}	0,4921	0,4921	0
S_{1122}	-0,0159	-0,0159	0
S_{2211}	0,1270	0,1270	0
S_{2222}	0,8254	0,8255	$1,21 \cdot 10^{-2}$
S_{1212}	0,6825	0,6825	0

O erro é calculado na forma de erro relativo percentual, descrito na Equação 82 e é denominado de erro absoluto (%) por ser considerado sempre positivo:

$$erro \quad percentual = \frac{|EH - EE|}{EE} \cdot 100 \quad (82)$$

onde EH são os resultados obtidos com a Estrutura Homogeneizada e EE são resultados obtidos

¹Onde T significa Tensor

com a Estrutura Explícita.

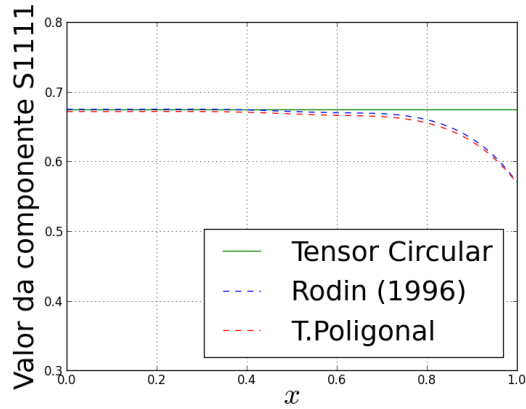
Avaliando os resultados encontrados entre as componentes do tensor, observa-se que entre as componentes S_{2222} encontra-se o maior erro de $1,21 \cdot 10^{-2}\%$. Vale ressaltar, que a referência utilizada forneceu apenas 4 casas decimais dos valores das componentes, por isso, foi necessário um truncamento dos resultados obtidos, gerando erros absolutos iguais a zero.

O *formato circular* do Tensor de Eshelby segue a definição dada na Equação 64. A Tabela 2 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo T.Circular com as componentes diferentes de zero determinadas por Klusemann et al. (2012), com $\nu = 0,3$.

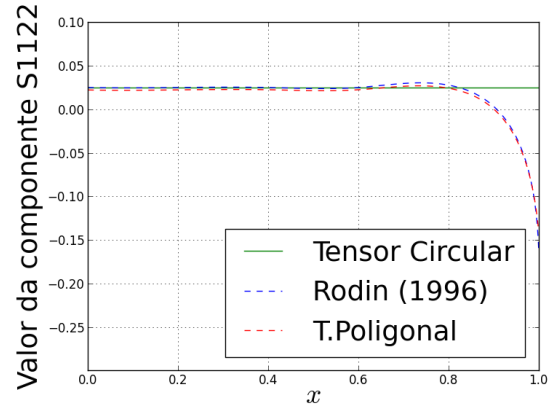
Tabela 2- TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO CIRCULAR			
Componente	Klusemann et al. (2012)	T.Circular	Erro absoluto (%)
$S_{1111} = S_{2222}$	0,6786	0,6786	0
$S_{1122} = S_{2211}$	0,0357	0,0357	0
S_{1212}	0,3214	0,3214	0

Da mesma forma que ocorreu no formato elíptico, foi necessário um truncamento dos resultados obtidos, pois os resultados da referência comparada utilizou apenas quatro casas decimais nos valores. Portanto, é possível afirmar que o algoritmo calcula de corretamente as componentes do tensor.

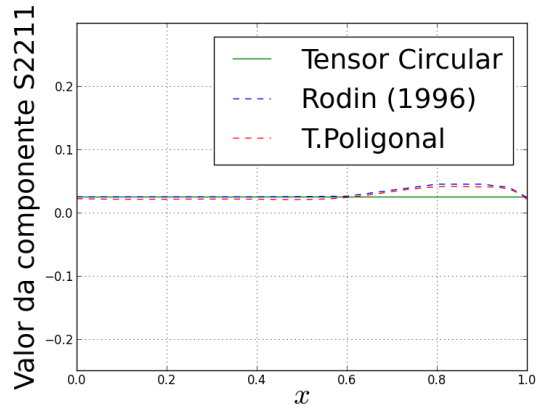
Para o *formato hexagonal regular*, as Figuras 7 e ?? apresentam a comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo T.Poligonal com as componentes diferentes de zero determinadas por Rodin (1996), utilizando $\nu = 0,3$ e uma circunferência unitária circunscrita no polígono, variando o valor de $x = 0$ (centróide da inclusão) até o valor de $x = 1$ vértice do polígono.



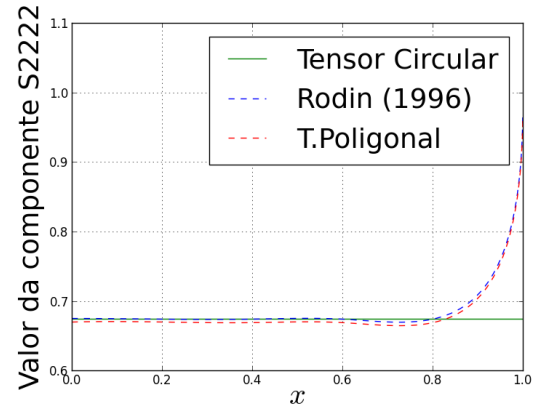
(a)



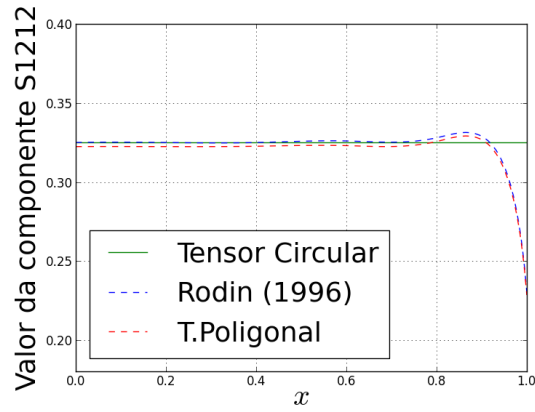
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 7- COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY POLIGONAL (a) S_{1111} (b) S_{1122} (c) S_{2211} (d) S_{2222} (e) S_{1212} .

Analisando a Figura 7, que ilustra os valores das componentes dos tensores diferentes de zero, verifica-se que ocorre uma aproximação satisfatória dos resultados. Observa-se que

para posições de x afastadas da borda do hexágono o Tensor de Eshelby poligonal se aproxima do Tensor de Eshelby circular (RODIN, 1996), (XU; WANG, 2005) e (LIU, 2011).

3.2 VALIDAÇÃO TENSORES DE ESHELBY TRIDIMENSIONAIS

Os formatos analisados para os casos tridimensionais foram o elipsoidal, o esférico e o cilíndrico. Para cada um dos formatos, um código diferente foi gerado, denominados respectivamente de T.Elipsoidal, T.Esférico e T.Cilíndrico ².

Os resultados obtidos por *T.Elipsoidal* foram comparados com o trabalho de Ma (2010), considerando um elipsoide ao longo do eixo x_3 , onde $\alpha_1 = \frac{x_1}{x_3} = 3$ e $\alpha_2 = \frac{x_2}{x_3} = 2$, coeficiente de Poisson igual a 0,3.

Tabela 3- TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO ELIPSOIDAL

Componente	Ma (2010)	T.Elipsoidal	Erro absoluto (%)
S_{3333}	0,7678	0,7678	0

Avaliando os resultados obtidos entre a componente do tensor, observa-se que o erro da aproximação é nulo devido ao restringimento das casas decimais fornecidas pela referência utilizada, com isso entende-se o que o erro absoluto é pequeno. Infelizmente Ma (2010) apenas explicita o valor da componente S_{3333} em seu trabalho, portanto somente foi possível uma comparação. No entanto, como a formulação para esta componente é idêntica as demais considera-se que o valor das componentes restantes também estarão dentro da tolerância admitida.

O *Tensor de Eshelby Esférico* foi validado utilizando o trabalho de Boari (2003), que faz simulações com um compósito de alumínio e partículas de Sic (Carboneto de Silício) imersas. Boari (2003) considera coeficiente de Poisson igual a 0,33 para o alumínio e módulo elástico da matriz e inclusão respectivamente iguais a $73GPa$ e $450GPa$. A Tabela 4 compara os resultados obtidos por T.Esférico com os aqueles determinados por Boari (2003):

Tabela 4- TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO ESFÉRICA

Componente	Boari (2003)	T.Esférico	Erro absoluto (%)
$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333}$	0,53234	0,53234	0
$S_{1122} = S_{1133} = S_{2211} = S_{2233} = S_{3311} = S_{3322}$	0,06468	0,06468	0
$S_{1212} = S_{1313} = S_{2323}$	0,23383	0,23383	0

²Onde T significa Tensor

Pode-se observar que a diferença entre as componentes é nula devido a restrição de casas decimais encontradas na literatura. Portanto, é possível afirmar que os valores obtidos são satisfatórios.

A Tabela 5 apresenta a comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo *T.Cilíndrico* com as componentes determinadas por Ma (2010), considerando um cilindro de raio a ao longo do eixo x_1 e coeficiente de Poisson igual a 0,3.

Tabela 5- TENSOR DE ESHELBY PARA INCLUSÃO CILÍNDRICA			
Componente	Ma (2010)	T.Cilíndrico	Erro absoluto (%)
$S_{1111} = S_{2222}$	0,6786	0,6786	0
S_{1212}	0,3214	0,3214	0

Avaliando os resultados obtidos entre as componentes do tensor, observa-se que o erro das componentes é zero devido ao número de casas decimais que Ma (2010) utilizou.

Os resultados apresentados ao longo deste capítulo, permitem afirmar que os valores obtidos do algoritmo em linguagem *Python* são coerentes com os resultados encontrados na literatura e, portanto, descrevem de modo adequado o Tensor de Eshelby para os respectivos formatos.

3.3 VALIDAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA

A validação do Método de Homogeneização de Mori-Tanaka ocorre de maneira comparativa entre os valores dos campos de deformação, deslocamento e tensão de uma Estrutura Explícita com uma Estruturas Homogeneizada.

No entanto, a Estrutura Explícita considera que a matriz e a inclusão possuem as mesmas propriedades mecânicas, $E = 6,9 \cdot 10^{10} Pa$ e $\nu = 0,33$ (alumínio), sendo constituída de uma inclusão esférica de raio igual a $25mm$ imersa em um cubo de lado igual a $151,2mm$. Com isso, o tensor efetivo de rigidez obtido pelo Método de Homogeneização de Mori-Tanaka, teve na sua formulação tensores de rigidez iguais para a matriz e para a inclusão.

A obtenção dos campos de deformação, deslocamento e tensão tanto da Estrutura Explícita como da Estruturas Homogeneizada, serão obtidas pelo *software Ansys*.

A Tabela 6 apresenta a comparação dos resultados encontrados pelas estruturas.

Tabela 6- CAMPOS

Estrutura	Deslocamento (<i>mm</i>)	Deformação (<i>mm</i> \ <i>mm</i>)	Tensão (<i>MPa</i>)
Explícita	9,6017	0,16011	13434
Homogeneizada	9,5381	0,16128	13597
Erro absoluto (%)	$6,6 \cdot 10^{-1}$	$7,7 \cdot 10^{-1}$	1,21

Pode-se observar que a diferença entre os campos de deslocamento e deformação são menores que 1%. A tensão possui um erro absoluto menor que 1,22%. Portanto, é possível afirmar que os valores obtidos são satisfatórios.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo, são apresentados os modelos de compósitos bifásicos idealizados nas geometrias bidimensionais e tridimensionais, além das análises desses modelos utilizando uma, duas e três inclusões imersas no meio elástico.

4.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho foram realizadas simulações computacionais com modelos idealizados de estruturas compósitas bifásicas bidimensionais e tridimensionais, com o objetivo de comparar uma Estrutura Explícita com uma Estrutura Homogeneizada. A Estrutura Explícita preserva a geometria original do compósito e as propriedades mecânicas de seus constituintes. A Estrutura Homogeneizada possui a geometria determinada pelo contorno externo da Estrutura Explícita e propriedades mecânicas homogeneizadas equivalentes.

As simulações bidimensionais foram realizadas considerando uma chapa quadrada com inclusões imersas e centralizadas nos formatos circular, elíptico e poligonal hexagonal regular. Já os testes tridimensionais são realizados utilizando um cubo, com inclusões esférica, elipsoidal e cilíndrica.

Observa-se que nas simulações realizadas as inclusões estão sempre centralizadas com o propósito de padronizar as simulações e atender ao Princípio de Saint-Venant, onde a inclusão deve estar distante das condições de contorno. Estudos relacionados com a da posição da inclusão na matriz podem ser encontrados nos artigos Melo e Argenta (2014a) e (MELO; ARGENTA, 2014b).

Cada modelo foi submetido a uma simulação representativa de um ensaio de tração, flexão biengastada, flexão em balanço e compressão.

Quatro simulações computacionais descritas nas subseções abaixo foram realizadas:

4.1.1 SIMULAÇÃO DO ENSAIO DE TRAÇÃO

A primeira simulação consiste em um ensaio de tração, no qual uma aresta (caso bidimensional) ou face (caso tridimensional) é engastada e a extremidade oposta contém um carregamento axial distribuído, como pode ser observado na Figura 8:

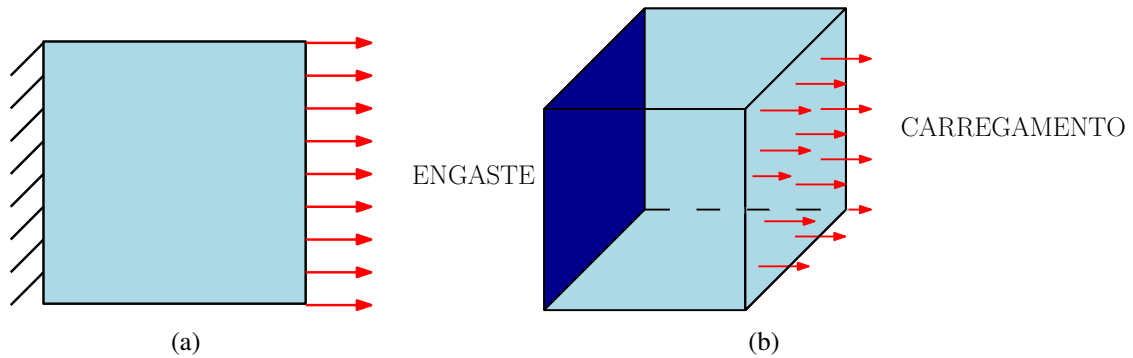


Figura 8- (a) PRIMEIRO TESTE BIDIMENSIONAL (b) PRIMEIRO TESTE TRIDIMENSIONAL

As simulações são representadas por siglas, nas quais a primeira entrada indica a quantidade de inclusões no teste; a segunda, condiz com o tipo de carregamento; a terceira, mostra a quantidade de condições de contorno e a última representa a dimensão do compósito. Por exemplo, a sigla $1.T.1.B$, está indicando que o teste é composto por uma inclusão (1), possui carregamento de tração T , uma condição de contorno (1) e é bidimensional (B).

Já para o caso tridimensional, modifica-se apenas a letra da sigla que representa a dimensão do compósito, ou seja, troca-se a letra B por T , desta forma, as simulações do primeiro teste para uma, duas e três inclusões tridimensionais são representados pelas siglas $1.T.1.T$; $2.T.1.T$ e $3.T.1.T$.

4.1.2 SIMULAÇÃO DO ENSAIO DE FLEXÃO BIENGASTADO

As simulações do segundo teste são constituídas por forças externas distribuídas na extremidade superior do compósito, além de duas laterais opostas serem engastadas, ou seja, trata-se de um ensaio de flexão em um compósito biengastado (Figura 9).

A sigla utilizada para este teste segue o padrão da primeira. Assim, para o caso bidimensional com duas inclusões tem-se $2.F.2.B$, com carregamento de flexão (F), duas condições de contorno (2) e é realizada em uma estrutura compósita bidimensional (B). Já para o caso tridimensional, a sigla correspondente para a simulação com três inclusões será $3.F.2.T$.

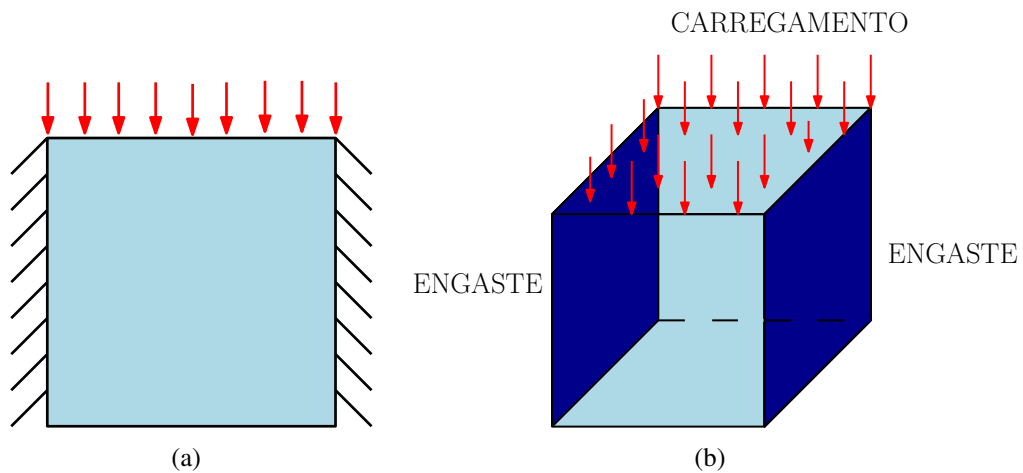


Figura 9- (a) SEGUNDO TESTE BIDIMENSIONAL (b) SEGUNDO TESTE TRIDIMENSIONAL

4.1.3 SIMULAÇÃO DE UM ENSAIO DE FLEXÃO EM BALANÇO

O terceiro teste possui uma extremidade ou lado engastado com um carregamento distribuído na face (caso tridimensional) ou aresta (caso bidimensional) superior, ou seja, a simulação de um ensaio de flexão em balanço de um compósito bifásico (Figura 10):

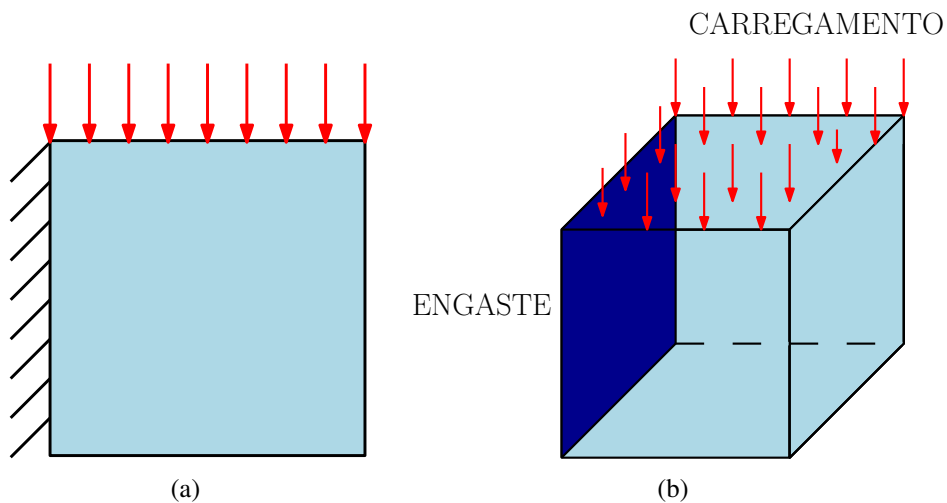


Figura 10- (a) TERCEIRO TESTE BIDIMENSIONAL (b) TERCEIRO TESTE TRIDIMENSIONAL

Assim como definido anteriormente, o primeiro elemento das expressões indica o número de inclusões, F refere-se a um carregamento transversal ou de flexão, 1 é o número de condições de contorno e B ou T é a dimensão do compósito. Com isso, a sigla utilizada para o caso tridimensional com uma inclusão, por exemplo, é $1.F.1.T$.

4.1.4 SIMULAÇÃO DE UM ENSAIO DE COMPRESSÃO

A quarta simulação representa uma compressão, ou seja, um lado (caso tridimensional) ou aresta (caso bidimensional) está engastado e a extremidade oposta têm um carregamento distribuído comprimindo o compósito (Figura 11).

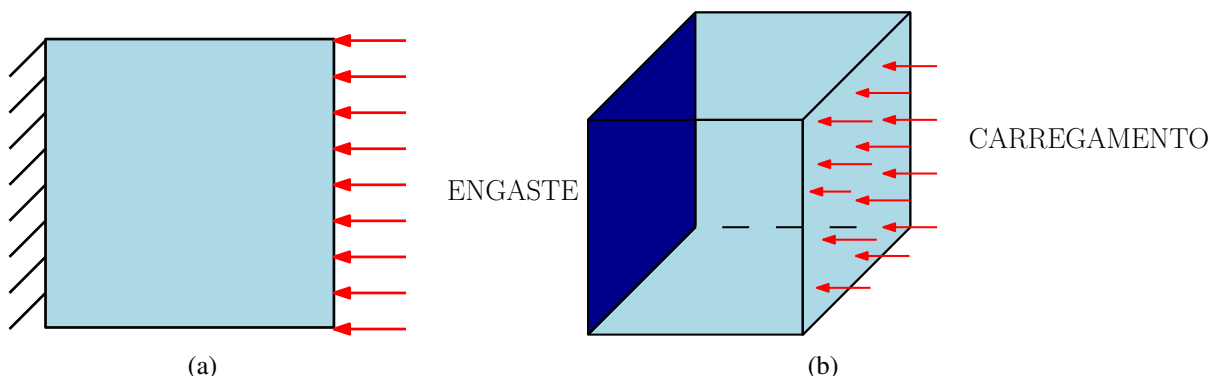


Figura 11- (a) QUARTO TESTE BIDIMENSIONAL (b) QUARTO TESTE TRIDIMENSIONAL

A sigla utilizada para o caso de três inclusões bidimensionais desse teste é $3.C.1.B$, ou seja, C significa carregamento do tipo compressão e o número 1 corresponde a uma condição de contorno em um material idealizado bidimensional (B).

Os carregamentos e condições de contorno foram escolhidas de maneira a avaliar o comportamento de inclusões dentro das estruturas nas quais a tensão tem variação uniforme e variação linear, ou seja, o compósito é submetido a esforços axiais e transversais.

4.2 DEFINIÇÃO DOS MATERIAIS DO COMPÓSITO BIFÁSICOS IDEALIZADOS

Nesta seção é apresentado um estudo dos materiais utilizados nos compósitos bifásicos idealizados bidimensional e tridimensional, com o objetivo de padronizar os materiais usados nas simulações computacionais deste trabalho.

Para isso, foram desenvolvidas simulações computacionais que possibilitaram a comparação entre as Estruturas Explícita e Homogeneizada com materiais que possuem propriedades mecânicas de rigidez diferentes, com o intuito de analisar o material que mais influencia nos campos elásticos do compósito bifásico. Para o caso bidimensional utilizou-se uma matriz quadrada de lado igual a $169,8mm$ com uma inclusão circular imersa de raio igual a $25mm$. Já as simulações tridimensionais foram realizadas em uma matriz cúbica de aresta igual a $151,2mm$ e uma inclusão esférica de raio igual a $25mm$, os tamanhos de matriz e inclusão utilizados estão definidos na seção 4.3.

As simulações computacionais consistem em obter o campo elástico do compósito bifásico idealizado com as condições de contorno do primeiro teste, definidos na seção 4.1.1, onde uma face ou aresta é engastada e possui um carregamento axial distribuído na face ou aresta oposta. Foram realizados três testes distintos, denominados Materiais da inclusão e matriz com rigidez iguais, Material da inclusão mais rígido do que o da matriz, Material da matriz mais rígido do que o da inclusão. Para a realização dos testes foram adotados dois materiais com rigidez distintas, aço e alumínio. As componentes elásticas correspondentes desses materiais são, respectivamente, $E = 2,07 \cdot 10^{11} Pa$ e $\nu = 0,3$; $E = 6,9 \cdot 10^{10} Pa$ e $\nu = 0,33$.

4.2.1 SIMULAÇÃO - MATERIAIS DA INCLUSÃO E MATRIZ COM RIGIDEZ IGUAIS

No primeiro teste, simula-se uma Estrutura Explícita onde as constituintes (matriz e inclusão) possuem as mesmas propriedades mecânicas, como por exemplo o alumínio.

Como o objetivo deste trabalho é avaliar a influência do material nos campos elásticos encontrados através do método de homogeneização entre as Estruturas Explícitas e as Homogeneizadas, referentes à igualdade da rigidez do material, percebe-se que este estudo já foi realizado na seção 3.3, mostrando aproximações admissíveis e influência do material no campo de rigidez alta, porém como as constituintes do material são iguais, o uso do método de homogeneização não é relevante. Consequentemente, não se faz necessário a réplica da simulação efetuada na seção anterior.

4.2.2 SIMULAÇÃO - MATERIAL DA INCLUSÃO MAIS RÍGIDO DO QUE O DA MATRIZ

Neste segundo teste, a simulação do ensaio de tração acontece entre uma Estrutura com matriz de alumínio e inclusão de aço, e outra Estrutura Homogeneizada, ou seja, a inclusão é mais rígida do que a matriz, tanto para o caso bidimensional como para o caso tridimensional.

A Tabela 7 apresenta os resultados para o campo elástico de uma chapa quadrada com uma inclusão circular. Os valores apresentados nesta tabela mostram que houve uma aproximação admissível. Os erros encontrados variam em um intervalo de 0,82% e 1,13%, na comparação entre a Estrutura Explícita e Estrutura Homogeneizada, sendo que a maior diferença está no campo tensorial e a menor no campo de deslocamentos.

A comparação da simulação - material da inclusão mais rígido do que o da matriz, para as estruturas tridimensionais podem ser analisados na Tabela 8. Nesta Tabela, as aproximações são satisfatórias, apresentando ordem percentual de erro em torno de 0,79% e 1,05%. Mos-

Tabela 7- RESULTADOS 1 - TESTE BIDIMENSIONAL

Teste - Uma Circular		Estrut. Explícita	Estrut. Homogeneizada	Erro absoluto %
1.T.1.B	Deslocamento (mm)	1,2963	1,2857	0,82
	Deformação (mm \ mm)	0,01396	0,013839	0,87
	Tensão (MPa)	1219,5	1205,7	1,13

trando maior percentual de diferença no campo tensorial e menor percentual no campo de deslocamentos.

Tabela 8- RESULTADOS 1 - TESTE TRIDIMENSIONAL

Teste - Uma Esfera		Estrut. Explícita	Estrut. Homogeneizada	Erro absoluto %
1.T.1.B	Deslocamento (mm)	9,6104	9,5341	0,79
	Deformação (mm \ mm)	0,20391	0,20215	0,86
	Tensão (MPa)	16790	16614	1,05

4.2.3 SIMULAÇÃO - MATERIAL DA MATRIZ MAIS RÍGIDO DO QUE O DA INCLUSÃO

O terceiro teste, é uma simulação do ensaio de tração que ocorre entre uma Estrutura com matriz de aço e inclusão de alumínio e outra Estrutura Homogeneizada, ou seja, a matriz é mais rígida do que a inclusão, tanto para o caso bidimensional como para o caso tridimensional.

Os resultados para o campo elástico de uma chapa quadrada com uma inclusão circular das duas estruturas encontram-se na Tabela 9.

Tabela 9- RESULTADOS 2 - TESTE BIDIMENSIONAL

Teste - Uma Circular		Estrut. Explícita	Estrut. Homogeneizada	Erro absoluto %
1.T.1.B	Deslocamento (mm)	0,48484	0,4805	0,89
	Deformação (mm \ mm)	0,0051409	0,0051845	0,85
	Tensão (MPa)	1290,3	1304,8	1,12

Observa-se que a aproximação têm diferença percentual menor no campo de deformação, correspondente a 0,85% e o percentual maior está no campo tensorial, de 1,12%.

A comparação da simulação - Material da matriz mais rígido do que o da inclusão, para as Estruturas Homogeneizadas e Explícitas tridimensionais podem ser analisados na Tabela 10.

Tabela 10- RESULTADOS 2 - TESTE TRIDIMENSIONAL

Teste - Uma Esfera		Estrut. Explícita	Estrut. Homogeneizada	Erro absoluto %
1.T.1.B	Deslocamento (mm)	3,2346	3,2574	0,70
	Deformação (mm \ mm)	0,052705	0,053183	0,91
	Tensão (MPa)	12716	12851	1,06

A comparação das simulações computacionais para as duas estruturas mostram que as aproximações estão na ordem de 0,70% a 1,06%.

Avaliando as três simulações realizadas, percebe-se que acontece a maior influência no campo elástico do compósito quando a inclusão é mais rígida do que a matriz. Portanto, as constituintes do compósito bifásico idealizado foram padronizados com inclusão de aço e matriz de alumínio para todos os experimentos computacionais.

4.3 FRAÇÕES DE ÁREA E FRAÇÕES VOLUMÉTRICAS

Nesta seção é apresentada uma análise sobre a fração de área e a fração volumétrica dos compósitos idealizados, com o intuito de obter um valor padrão que será utilizado nas simulações deste trabalho, para o tamanho das matrizes bidimensionais e tridimensionais, fixando-se o tamanho da inclusão.

O objetivo desse procedimento é encontrar uma fração de área e uma fração volumétrica para o compósitos idealizados que resultem em um erro inferior à 1,3%, quando comparadas as Estruturas Explícita e Homogeneizada. Dessa forma, é possível identificar somente o valor do erro quando se altera o formato da inclusão.

Para isso, foram desenvolvidas simulações computacionais com diferentes tamanhos de matriz tanto com matriz e inclusão explícitas quanto com compósitos homogeneizados. Os testes foram realizados utilizando uma inclusão circular e uma matriz quadrada para os casos bidimensionais e uma inclusão esférica imersa em uma matriz cúbica para os tridimensionais. A escolha do formato da inclusão está relacionada com o fato do Tensor de Eshelby Esférico e Circular possuírem uma expressão compacta.

O experimento computacional consiste em obter o campo elástico do compósito bifásico quando uma face ou aresta é engastada e possui um carregamento distribuído na face ou aresta oposta, sendo este o primeiro teste definido na seção 4.1.1. Foram adotadas inclusões de aço e matriz de alumínio. Com isso, as componentes elásticas são, respectivamente, $E = 2,07 \cdot 10^{11} Pa$ e $\nu = 0,3$; $E = 6,9 \cdot 10^{10} Pa$ e $\nu = 0,33$.

A quantidade de nós e elementos gerados pelo Método de Elementos Finitos utilizado nas simulações podem ser encontrados no Apêndice A.

As dimensões iniciais bidimensionais utilizadas para obter os primeiros valores de frações de área foram raio de 25mm para a inclusão no formato circular e matriz de aresta igual a 60mm, de modo que as bordas da inclusão fiquem bem próximas às arestas da matriz. Em

seguida, efetuou-se a comparação entre a aproximação obtida para as duas estruturas. Caso o erro percentual seja superior a 1,3%, divide-se a fração de área inicial da inclusão pela metade, para assim determinar o valor da aresta que será utilizada na mesma simulação. Este processo é repetido até que o percentual de erro seja inferior a 1,3%.

Com isso, tem-se arestas iguais a 60mm; 84,6mm; 120mm e 169,8mm (Figura 12) para a matriz. Vale ressaltar que são modificadas apenas as medidas dos lados da matriz, sendo que o valor do raio da inclusão circular permanece igual a 25mm em todas as simulações.

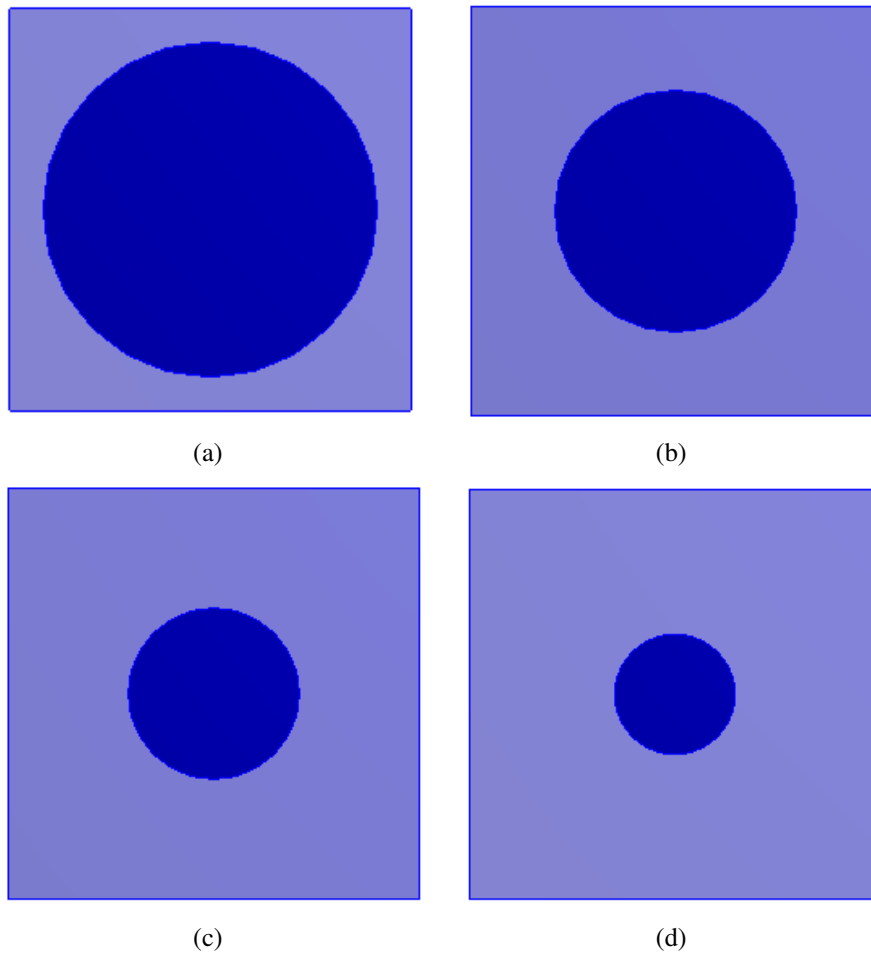


Figura 12- (a) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 60mm, (b) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 84,6mm, (c) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 120mm E (d) MATRIZ DE ARESTA IGUAL A 169,8mm.

A Tabela 11 contém as aproximações encontradas com as quatro dimensões de matriz para as Estruturas Explícitas e as Estruturas Homogeneizadas. Onde os deslocamentos estão em mm, as deformações em mm/mm e a tensão em MPa.

Com base nas informações tabeladas, percebe-se que, para os testes, nos quais as arestas do quadrado medem 60mm encontram-se erros de aproximadamente 2,2% em todos os campos elásticos. Já para a matriz de lado igual a 84,6mm, a diferença para os campos de des-

Tabela 11- ANÁLISE DA FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CHAPA

Chapa com Inclusão Circular		60mm	84,6mm	120mm	169,8mm
Estruturas Explícitas	Deslocamento	1,0162	1,2205	1,2808	1,2963
	Deformação	0,030021	0,02404	0,018735	0,01396
	Tensão	2616,4	2092,9	1635,4	1219,5
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	0,99879	1,19985	1,26402	1,2857
	Deformação	0,029416	0,023635	0,018475	0,013839
	Tensão	2558,6	2054,1	1610,9	1205,7
Erro absoluto (%)	Deslocamento	1,71	1,69	1,31	0,82
	Deformação	2,02	1,68	1,38	0,87
	Tensão	2,21	1,85	1,50	1,13

locamento, deformação e tensão são de, respectivamente, $2,065 \cdot 10^{-2}mm$, $4,05 \cdot 10^{-4}$ e 38,8; representando um erro de aproximadamente 1,86% para os campos. Quando a aresta da matriz aumenta para 120mm as aproximações melhoraram, representando porcentagens de erro de 1,31; 1,39 e 1,51 para os campos elásticos respectivos. Aumentando a dimensão da aresta do quadrado para 169,8mm, pôde-se verificar uma aproximação para os campos de deslocamento e deformação menores do que 1%, já para o campo tensorial a diferença é de 1,13%.

Como as porcentagens de erro para a medida da aresta da matriz igual a 169,8mm, mostraram-se satisfatórios, no âmbito deste trabalho, todos os testes bidimensionais a seguir, consideram a matriz sendo uma chapa quadrada com lados iguais a 169,8mm.

Como indicado anteriormente, as simulações tridimensionais são semelhantes as bi-dimensionais. A princípio, são considerados uma esfera com raio igual a 25mm e matriz de aresta com valor inicial de 60mm (Figura 13 - (a)). Com isso, obteve-se fração volumétrica da inclusão.

Dividindo pela metade o valor inicial da fração volumétrica da inclusão, obteve-se uma nova fração volumétrica, correspondente a um cubo medindo 75,6mm de aresta (Figura 13 - (b)). Repetindo a divisão da fração volumétrica três vezes consecutivas, obteve-se medidas da aresta do cubo iguais a 95,4mm, 120mm e 151,2mm (Figuras 14). Assim como nos casos bidimensionais, a esfera permanece com raio igual a 25mm em todas as simulações.

A Tabela 12 contém as aproximações encontradas com as cinco dimensões de matriz para as Estruturas Explícitas e as Estruturas Homogeneizadas. Sabendo que os deslocamentos estão em mm, as deformações em mm/mm e a tensão em MPa.

Com esta comparação, observa-se que o cubo com lado igual a 60mm possui aproximações dos campos elásticos com erros percentuais maiores do que 2,36%. Já para os sólidos idealizados com 75,6mm de lado, as diferenças percentuais chegaram até a 2,35%, enquanto o

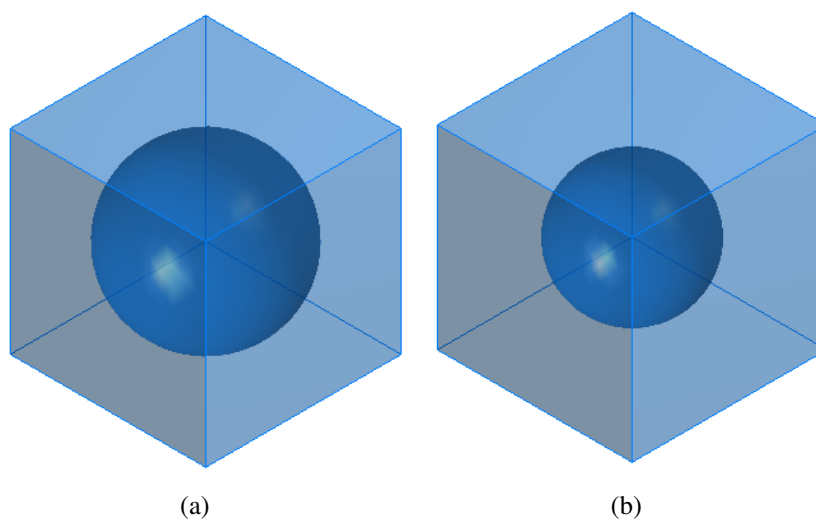


Figura 13- (a) MATRIZ DE LADO IGUAL A 60mm, (b) MATRIZ DE LADO IGUAL A 75,6mm.

Tabela 12- ANÁLISE DA FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CUBO

Compósito		60mm	75,6mm	95,4mm	120mm	151,2mm
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,2263	1,8761	1,5137	1,209	9,6104
	Deformação	0,066838	0,053376	0,043157	0,030591	0,20391
	Tensão	5598,3	4477,4	3639,6	2649,7	16790
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,16744	1,8321	1,4852	1,1925	9,5341
	Deformação	0,065261	0,052228	0,042387	0,030156	0,20215
	Tensão	5447,2	4379,2	3564,7	2608,4	16614
Erro absoluto (%)	Deslocamento	2,64	2,35	1,88	1,36	0,79
	Deformação	2,36	2,15	1,78	1,42	0,86
	Tensão	2,70	2,19	2,06	1,56	1,05

cubo com lado igual a 95,4mm o erro diminuiu, chegando a um máximo de 2,06% no campo tensorial, com diferenças de $2,85 \cdot 10^{-2}mm$; $7,7 \cdot 10^{-4}$ e 74,9 para o campo de deslocamentos, deformação e tensão.

Considerando a fração volumétrica da inclusão correspondente à matriz de lado igual a 120mm, a Tabela 12 mostra que o maior erro é referente ao campo de deformação com 1,56%, correspondente a uma diferença de $4,4 \cdot 10^{-4}$ entre a Estrutura Explícita e a Estrutura Homogeneizada. Contudo, para uma matriz de lado igual a 151,2mm, os erros para o campo de deformação e deslocamento são menores do que 1%, já a para o campo tensional, é de 1,05%.

Como as porcentagens de erro para a medida do lado da matriz igual a 151,2mm se mostraram satisfatórias no âmbito deste trabalho, todos os testes tridimensionais a seguir consideraram matriz como sendo um cubo de arestas iguais a 151,2mm.

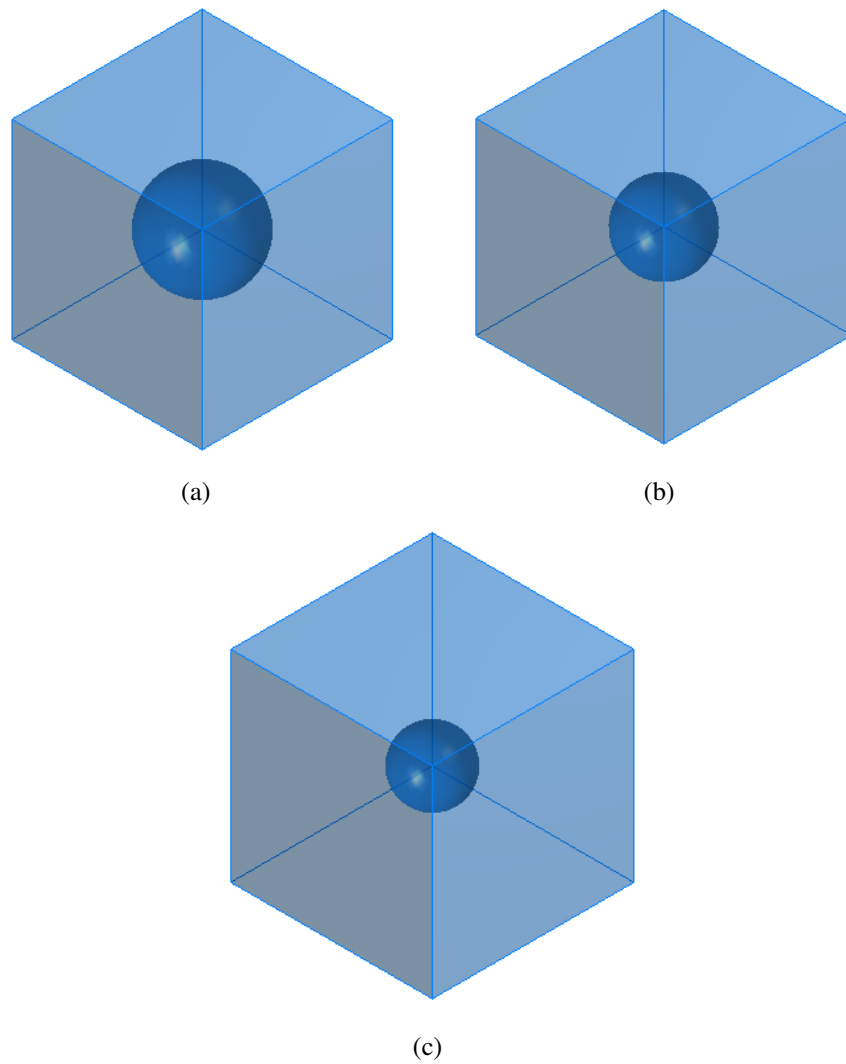


Figura 14- (a) MATRIZ DE LADO IGUAL A 95,4mm, (b) MATRIZ DE LADO IGUAL A 120mm E (c) MATRIZ DE LADO IGUAL A 151,2mm.

4.4 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS

As simulações bidimensionais ocorreram idealizando um compósito bifásico constituído de uma chapa de alumínio como matriz, com inclusões de aço nos formatos elíptico, circular e poligonal hexagonal (Figura 15), com as respectivas componentes elásticas $E = 6,9 \cdot 10^{10} Pa$ e $\nu = 0,33$; $E = 2,07 \cdot 10^{11} Pa$ e $\nu = 0,3$.

A inclusão elíptica tem raio maior de 30mm e o raio menor de 20mm, enquanto a inclusão circular tem raio igual a 25mm; e o polígono, tem um lado de 25mm.

A Figura 16 representa os compósitos realizados com uma matriz e duas inclusões iguais. Já a Figura 17 representa o compósito com três inclusões do mesmo formato imersas em uma única matriz. Nestes casos, quando há duas inclusões, a matriz é uma chapa retangular

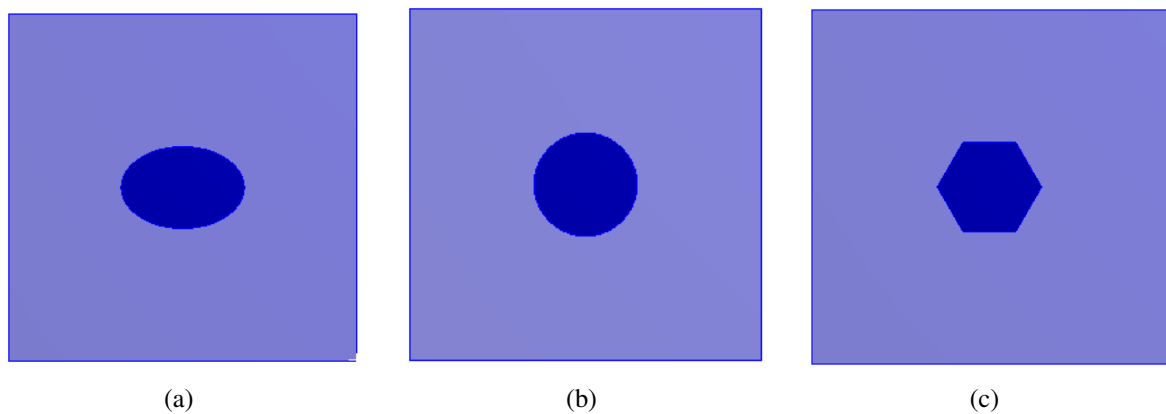


Figura 15- CHAPA COM: (a) UMA INCLUSÃO ELÍPTICA, (b) UMA INCLUSÃO CIRCULAR E (c) UMA INCLUSÃO POLIGONAL.

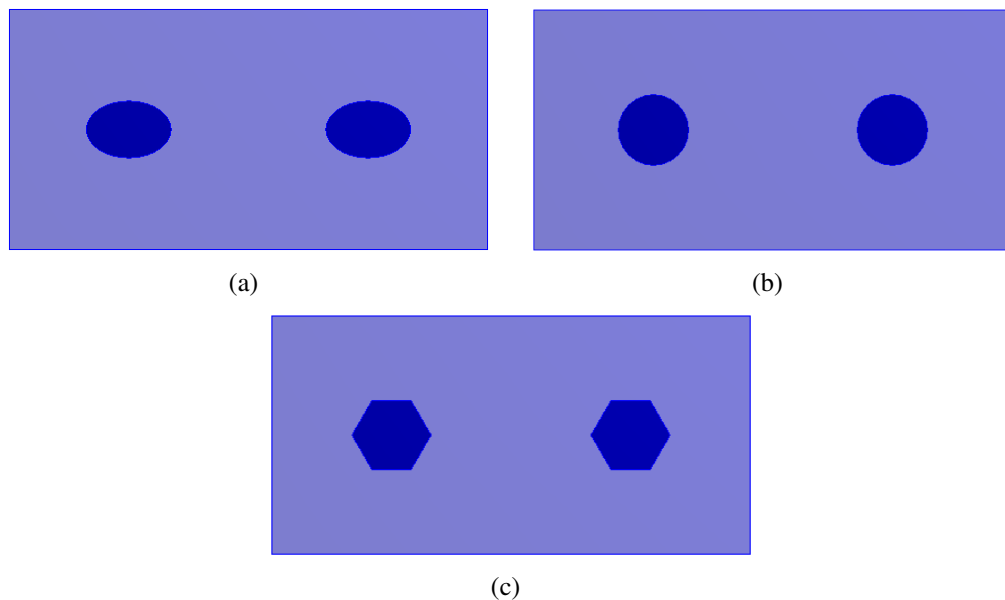


Figura 16- CHAPA COM: (a) DUAS INCLUSÕES ELÍPTICAS, (b) DUAS INCLUSÕES CIRCULARES E (c) DUAS INCLUSÕES POLIGONAIS.

de $339,6\text{mm}$ de comprimento e $169,8\text{mm}$ de largura; para os casos com três inclusões, o comprimento é de $453,6\text{mm}$ e a largura continua sendo $169,8\text{mm}$. Assim as inclusões permanecem com as mesmas dimensões, independente da quantidade de imersões presente na matriz.

4.5 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS

As análises tridimensionais foram realizadas em um sólido composto de alumínio e inclusões de aço. Sendo assim, as componentes elásticas destas simulações são iguais às bidimensionais.

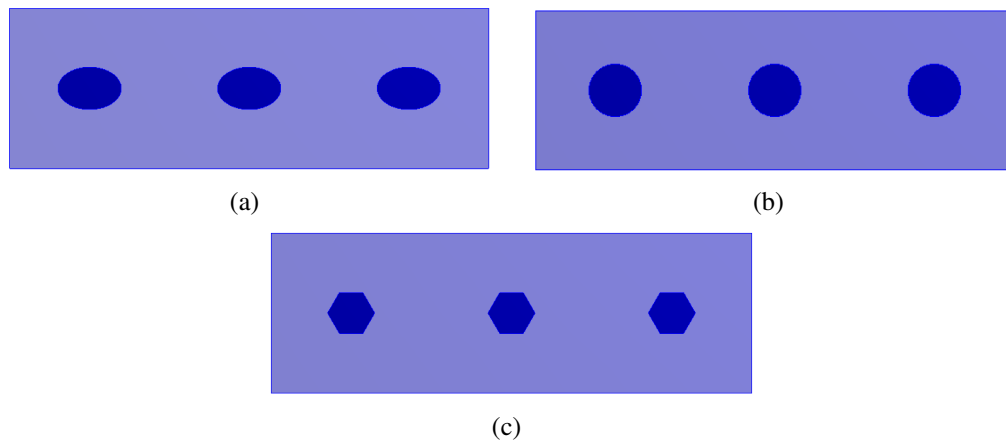


Figura 17- CHAPA COM: (a) TRÊS INCLUSÕES ELÍPTICAS, (b) TRÊS INCLUSÕES CIRCULARES E (c) TRÊS INCLUSÕES POLIGONAIS.

A Figura 18 representa as simulações com uma inclusão centralizada na matriz. A inclusão elipsoidal tem o raio maior de $30mm$ e os dois raios menores de $20mm$, a esfera tem raio de $25mm$ e a inclusão cilíndrica tem raio de base igual a $25mm$ e altura de $4mm$.

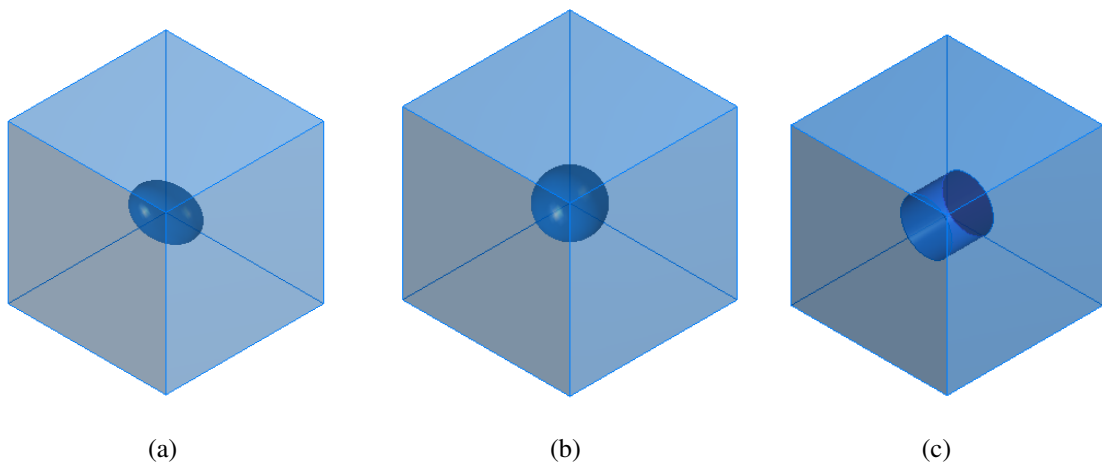


Figura 18- CUBO COM: (a) UMA INCLUSÃO ELIPSOIDAL, (b) UMA INCLUSÃO ESFÉRICA E (c) UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA.

Assim como nos casos bidimensionais, foram realizadas simulações com duas e três inclusões (Figura 19 e Figura 20). As dimensões da matriz nos casos com duas inclusões são de $302,4mm$; $151,2mm$ e $151,2mm$, para comprimento, largura e altura, respectivamente. Quando a simulação contém três inclusões, o comprimento varia para $453,6mm$ e as outras dimensões permanecem as mesmas. Vale ressaltar que as medidas das inclusões permanecem iguais, independente da quantidade delas presente na matriz.

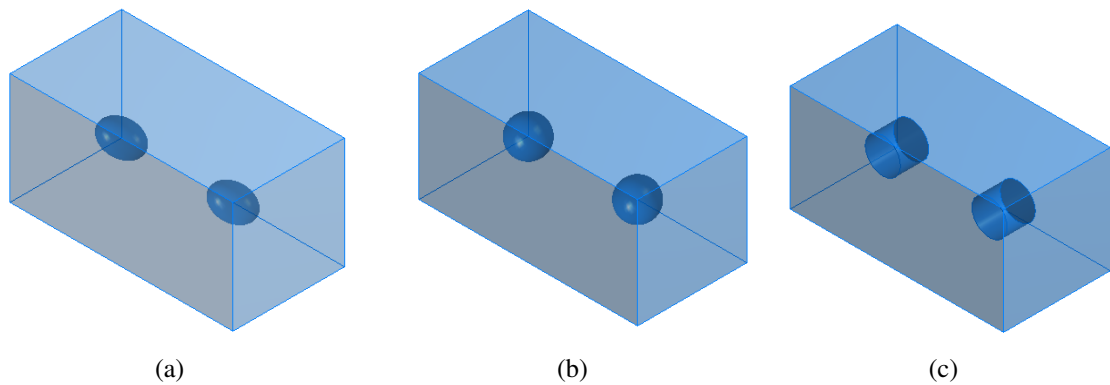


Figura 19- SÓLIDO COM: (a) DUAS INCLUSÕES ELIPSOIDAIS, (b) DUAS INCLUSÕES ESFÉRICAS, (c) DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.

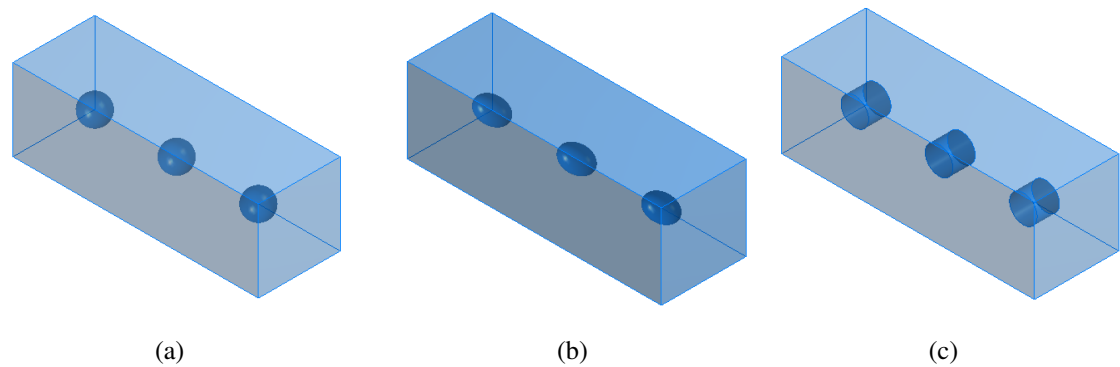


Figura 20- SÓLIDO COM: (a) TRÊS INCLUSÕES ELIPSOIDAIS, (b) TRÊS INCLUSÕES ESFÉRICAS E (c) TRÊS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.

4.6 MÉTODOS UTILIZADOS

O desenvolvimento do trabalho inicia-se com a criação de algoritmos para determinar as componentes do Tensor de Eshelby referentes a cada formato estudado. Os mesmos foram gerados em linguagem *Python*, versão 2.7.6, utilizando o conceito de Tensores de Eshelby mostrados na seção 2.2.1.

Em seguida, a determinação das propriedades efetivas para cada modelo idealizado é obtida, utilizando o Método de Mori-Tanaka, que apresenta uma forma explícita para determinar o tensor constitutivo efetivo. Os tensores constitutivos são determinados com o desenvolvimento de dois algoritmos em linguagem *Python*, denominados “Homogeneização 2D” e “Homogeneização 3D”, respectivamente para os casos bidimensionais e tridimensionais.

Após a obtenção dos tensores constitutivos efetivos determinados pelos algoritmos, esses valores são utilizados para obter os campos elásticos das Estruturas Compósitas Homogenei-

zadas pelo *software Ansys*. Tais análises foram efetuadas em um computador com processador Intel®Core™i5 – 3337 de 1.80GHz e sistema operacional de 64 bits.

Para a comparação e avaliação final, são encontrados os campos elásticos das Estruturas Homogeneizadas, com o auxílio do tensor constitutivo efetivo homogeneizado e os campos elásticos das Estruturas Explícitas, nos quais os coeficientes elásticos são preservados. Desta maneira, é possível realizar uma análise comparativa dos campos elásticos entre duas estruturas.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo tem como objetivo analisar os resultados obtidos nos testes realizados no *software Ansys*, que foram executados até a obtenção da convergência do campo elástico, obtendo diferença irrelevante nos resultados encontrados entre refinamentos de malha ou até um refinamento de malha compatível com a capacidade de memória do computador. As malhas foram geradas com o uso do modo *Use Advanced Size Function* e com a opção *Proximity and Curvature*, que possui o efeito de refinamento automático em todas as regiões de maior curvatura, com proximidade entre duas entidades geométricas, pois essa combinação tende a encontrar a melhor aproximação (ANSYS, INC., 2009). Vale ressaltar que a relação de compatibilidade entre a malha gerada na matriz e a gerada na inclusão são indispensáveis para a obtenção de resultados coerentes e satisfatórios. Na Figura 21, estão ilustradas duas malhas dos compósitos idealizados, uma seção do sólido com uma inclusão elipsoidal e uma malha quadrada com duas inclusões circulares.

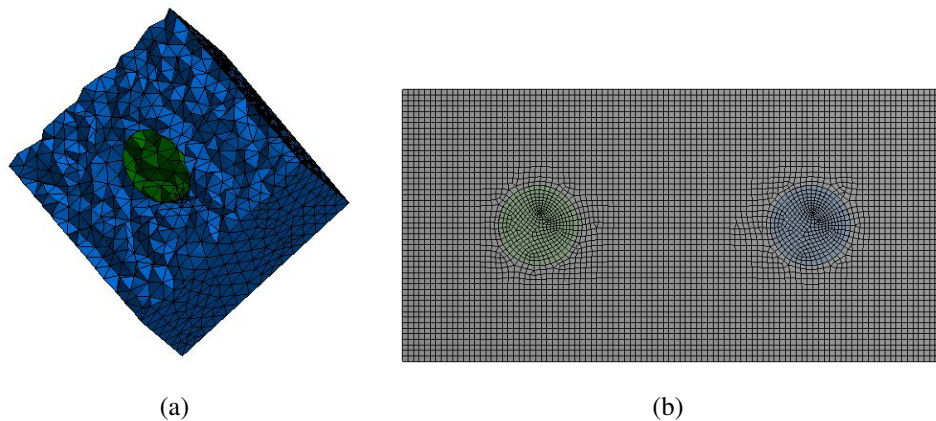


Figura 21- MALHAS: (a) SEÇÃO DO SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO ELIPSOIDAL (b) MATRIZ QUADRADA COM UMA INCLUSÃO CIRCULAR (c).

Com isso, torna-se necessário expor as quantidades de nós e elementos utilizados na malha de Elementos Finitos geradas pelo *software Ansys*, pois evidenciam a precisão dos resultados alcançados. Estas malhas podem ser encontradas nos Apêndice B e C.

5.1 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS COM ÚNICA INCLUSÃO

Nesta seção, serão analisados e expostos os resultados dos quatro testes computacionais, obtidos para as estruturas com apenas uma inclusão bidimensional. Vale ressaltar que os valores de deslocamento, deformação e tensão são referentes a **extremidade carregada**, com as respectivas unidades mm , $mm \setminus mm$ e MPa

Os resultados dos testes para a chapa de alumínio com uma inclusão elíptica de aço são exibidos na Tabela 13, onde verifica-se que os testes 1.T.1.B e 1.C.1.B obtiveram as melhores aproximações dos campos de deslocamento e deformação entre as Estruturas Explícitas e as Homogeneizadas. No entanto, comparando apenas os campos tensoriais entre os quatro testes, o que possui o menor erro é 1.F.1.B, com aproximadamente 0,99%.

Tabela 13- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ELIPSE

Uma Inclusão Elíptica		1.T.1.B	1.F.2.B	1.F.1.B	1.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	1,2971	8,7051	4,9669	1,2971
	Deformação	0,01394	0,23176	0,06033	0,0051576
	Tensão	1217,9	17634	5067,2	110,22
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	1,2857	8,5945	4,9153	1,2857
	Deformação	0,013824	0,22896	0,061136	0,0051071
	Tensão	1232	17453	5017,2	108,95
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,88	1,27	1,04	0,88
	Deformação	0,83	1,21	1,34	0,98
	Tensão	1,16	1,03	0,99	1,15

A Figura 22 complementa a Tabela 13 e com isso, observa-se maior diferença entre os compósitos explícitos e homogeneizados no teste 1.F.2.B, havendo, para o campo de deslocamento e deformação um erro percentual em torno de 1,27% e 1,21%.

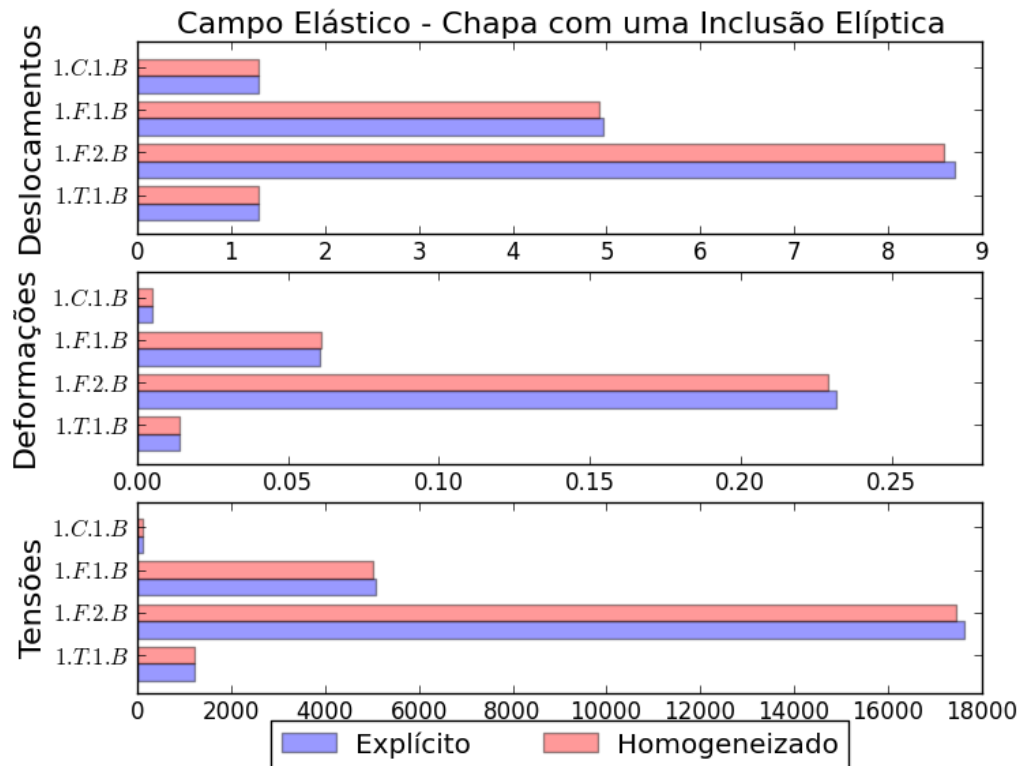


Figura 22- RESULTADOS CHAPA COM INCLUSÃO ELÍPTICA.

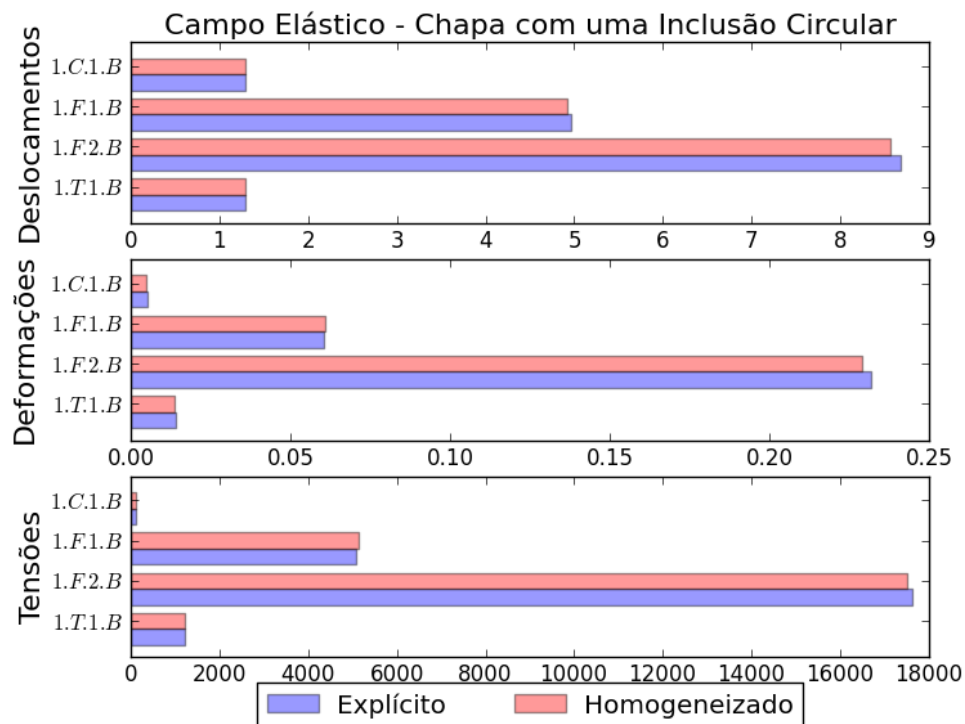
A Tabela 14 apresenta os resultados para o campo elástico de uma chapa quadrada com uma única inclusão circular para os quatro diferentes testes, com as dimensões e as condições de contorno definidas anteriormente. Os valores apresentados nesta tabela mostram que as melhores aproximações para o campo de deslocamento estão nos testes 1.T.1.B e 1.C.1.B, que apresentaram diferença, respectiva, de $1,05 \cdot 10^{-2} mm$ e $1,15 \cdot 10^{-2} mm$ na comparação entre a Estrutura Explícita e Estrutura Homogeneizada. Para os campos de deformações, os valores que mais se aproximaram aconteceram também nos testes 1.T.1.B e 1.C.1.B, com as respectivas variações $1,21 \cdot 10^{-4}$ e $4,72 \cdot 10^{-5}$.

A comparação das simulações computacionais para as duas estruturas é melhor visualizada na Figura 23, que mostra o desempenho dos testes. Analisando os experimentos computacionais 1.F.2.B e 1.F.1.B que simulam ensaios de flexão, observa-se que o segundo teste é o que apresentou a maior taxa percentual de alterações, variando de 0,81% a 1,35%.

Para uma inclusão poligonal hexagonal regular imersa em uma matriz quadrada, os valores encontrados estão expostos na Tabela 15. É possível observar que as melhores aproximações ocorrem nos testes 1.T.1.B e 1.C.1.B. Comparando estas duas simulações, encontram-se melhores resultados para o campo de deformação no teste 1.C.1.B com diferença de $6,18 \cdot 10^{-5}$.

Tabela 14- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA CIRCULAR

Uma Inclusão Circular		1.T.1.B	1.F.2.B	1.F.1.B	1.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	1,2963	8,6844	4,9652	1,2964
	Deformação	0,01396	0,23176	0,060352	0,0050716
	Tensão	1219,5	17635	5068,3	111,79
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	1,2857	8,5669	4,9176	1,2849
	Deformação	0,013839	0,22895	0,060939	0,0050244
	Tensão	1205,7	17493	5129,2	112,87
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,82	1,35	0,96	0,89
	Deformação	0,87	1,21	0,97	0,93
	Tensão	1,14	0,81	1,20	0,97

**Figura 23- RESULTADOS CHAPA COM INCLUSÃO CIRCULAR.**

Contudo, o primeiro teste 1.T.1.B mostra melhores aproximações para o campo tensorial, com diferença absoluto de 17,2 entre a estrutura explícita e a estrutura homogeneizada.

Tabela 15- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM POLÍGONO					
Uma Inclusão Poligonal		1.T.1.B	1.F.2.B	1.F.1.B	1.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	1,3026	8,9793	5,2032	1,3026
	Deformação	0,014817	0,23434	0,061228	0,0051546
	Tensão	1297	17880	5150,9	109,61
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	1,2865	8,8342	5,1271	1,2865
	Deformação	0,014623	0,230968	0,060394	0,0050928
	Tensão	1314,2	17615	5072,8	111,35
Erro absoluto (%)	Deslocamento	1,24	1,62	1,46	1,24
	Deformação	1,31	1,44	1,36	1,20
	Tensão	1,33	1,48	1,51	1,59

Comparando as variações dos campos elásticos na segunda e na terceira simulação, observa-se que apenas o campo tensorial do teste 1.F.1.B tem maior diferença do que o teste 1.F.2.B, com aproximadamente 78,1 de erro (Figura 24).

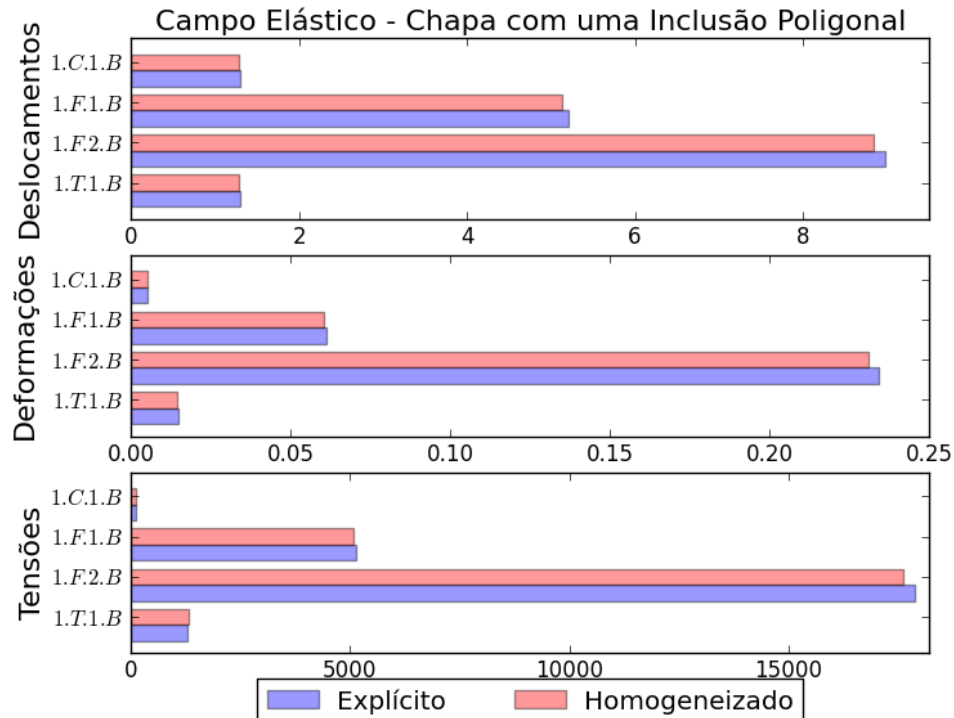


Figura 24- RESULTADOS CHAPA COM INCLUSÃO POLIGONAL.

5.2 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS COM DUAS INCLUSÕES

Os resultados dos experimentos computacionais para as chapas com duas inclusões elípticas são exibidos na Tabela 16. Analisando-a, é possível observar que o terceiro teste obteve o melhor erro percentual de 0,96% no campo de deslocamento, o que representa uma diferença de $1,99 \cdot 10^{-2} mm$. Já, o primeiro e o último teste apresentam aproximações para os campos de deslocamento e deformação, com uma diferença de $2,39 \cdot 10^{-2} mm$ para ambos os testes no campo de deslocamento e $1,27 \cdot 10^{-4}$ e $5,24 \cdot 10^{-5}$, respectivamente, para o campo de deformação.

Por outro lado, o segundo teste (2.F.2.B) possui erro porcentual de aproximadamente 0,83% para o campo de deformação, uma das melhores comparações nos compósitos com duas inclusões no formato elíptico. Estas observações e as diferenças podem ser visualizadas na Figura 25.

Tabela 16- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ELIPSES

Duas Inclusões Elípticas		2.T.1.B	2.F.2.B	2.F.1.B	2.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,4739	1,4082	2,0658	2,4739
	Deformação	0,013453	0,021609	0,0080214	0,0056312
	Tensão	1175,4	1775	697,43	99,206
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,45	1,3929	2,0459	2,45
	Deformação	0,013326	0,02143	0,0079391	0,0055788
	Tensão	1189,6	1753,9	689,08	98,076
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,97	1,09	0,96	0,97
	Deformação	0,94	0,83	1,03	0,93
	Tensão	1,21	1,19	1,20	1,14

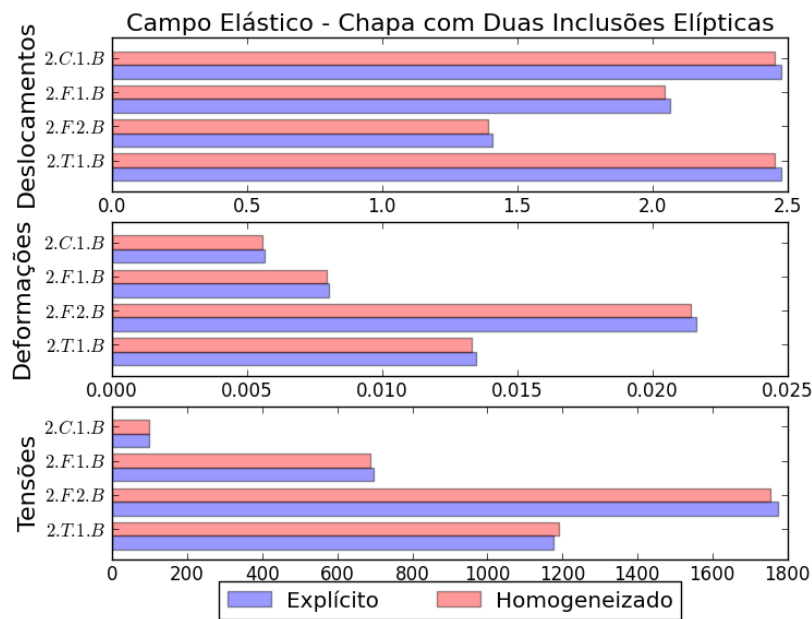


Figura 25- RESULTADOS CHAPA COM DUAS INCLUSÕES ELÍPTICAS.

Analisando os resultados para a chapa retangular com duas inclusões circulares imersas, a Tabela 17 apresenta a comparação dos campos elásticos entre as Estruturas Explícitas e as Estruturas Homogeneizadas. Com isto, verifica-se que o campo de deslocamento para os testes 2.T.1.B e 2.C.1.B tem um percentual de erro de aproximadamente 0,85% e diferença de deformação de $1,29 \cdot 10^{-4}$ e $4,7 \cdot 10^{-5}$, respectivamente. No entanto, os resultados da simulação do ensaio de flexão biengastado (2.F.2.B) apresentaram maior diferença absoluta entre as estruturas, com $1,4 \cdot 10^{-2} mm$; $2,82 \cdot 10^{-4}$ e 21 para os campos de deslocamento, deformação e tensão, respectivamente.

Tabela 17- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS CIRCULARES

Duas Inclusões Circulares		2.T.1.B	2.F.2.B	2.F.1.B	2.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,4794	1,4073	2,0601	2,4794
	Deformação	0,013571	0,021753	0,0080576	0,005094
	Tensão	1185	1787,2	700,49	116,23
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,4583	1,3932	2,0402	2,4583
	Deformação	0,013442	0,022035	0,0081403	0,005047
	Tensão	1197,8	1808,2	692,74	115,01
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,85	1,00	0,97	0,85
	Deformação	0,95	1,30	1,03	0,92
	Tensão	1,08	1,18	1,11	1,05

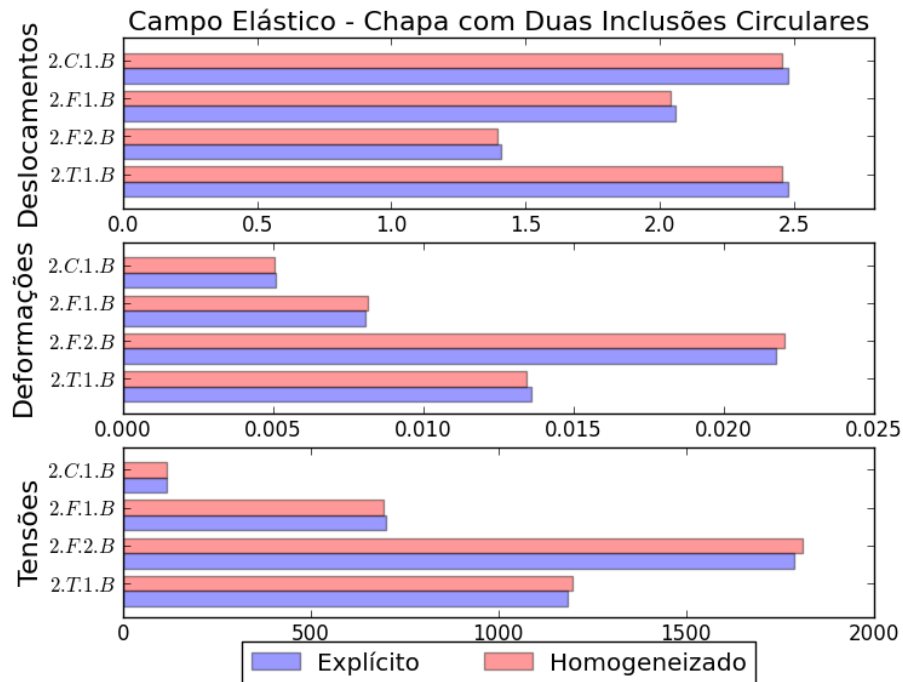


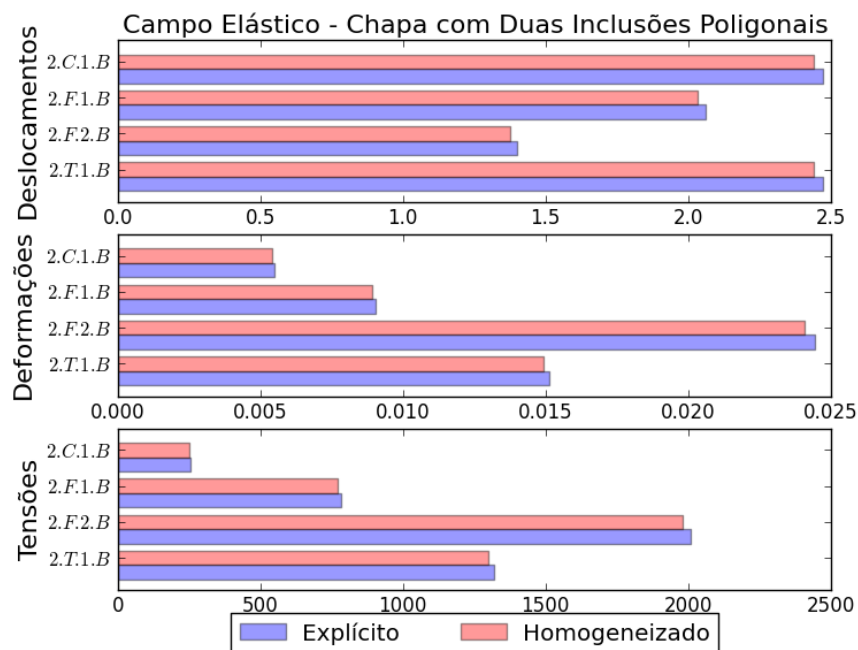
Figura 26- RESULTADOS CHAPA COM DUAS INCLUSÕES CIRCULARES.

A Figura 26 representa os valores obtidos com as simulações de duas inclusões circulares imersas em uma matriz. É possível verificar que, para os testes 2.F.2.B e 2.F.1.B, o campo tensorial apresentou maior diferença entre os valores obtidos, com variação média de 1,1% entre os quatro testes.

Para as chapas retangulares com duas inclusões poligonais, os resultados das simulações estão expostos na Tabela 18 e representadas na Figura 27. Com relação a este formato de inclusão, a análise comparativa demonstra que as melhores aproximações para o campo de deslocamento acontecem nos testes 2.T.1.B e 2.C.1.B, ambos com variação de aproximadamente $3,15 \cdot 10^{-2} mm$.

Tabela 18- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS-DOIS POLÍGONOS

Duas Inclusões Poligonais		2.T.1.B	2.F.2.B	2.F.1.B	2.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,4708	1,3976	2,0614	2,4708
	Deformação	0,015113	0,024448	0,0090224	0,0054879
	Tensão	1318,6	2007,7	783,69	252,93
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,4393	1,37588	2,0342	2,4393
	Deformação	0,014918	0,0240896	0,0088985	0,0054117
	Tensão	1299,4	1978,5	771,9	249,36
Erro absoluto (%)	Deslocamento	1,27	1,55	1,32	1,27
	Deformação	1,29	1,47	1,37	1,39
	Tensão	1,46	1,45	1,50	1,41

**Figura 27- RESULTADOS CHAPA COM DUAS INCLUSÕES POLIGONAIS.**

Obtendo-se um erro de $1,95 \cdot 10^{-4}$ no campo de deformação, a simulação 2.T.1.B mostrou-se a mais próxima dos valores com matriz e duas inclusões explícitas.

A melhor aproximação para o campo tensorial ocorreu no quarto teste, com 3,57 de diferença, seguido do teste 2.F.2.B com variação de 29,2; representando um erro percentual aproximado de 1,41% e 1,45% respectivamente.

5.3 MATERIAIS IDEALIZADOS BIDIMENSIONAIS COM TRÊS INCLUSÕES

Nesta seção, são apresentados os valores obtidos por meio das simulações computacionais com duas inclusões imersas em uma chapa retangular.

A Tabela 19 representa os resultados encontrados para os campos de deslocamento, deformação e tensão referentes a três inclusões elípticas em uma matriz retangular. Avaliando esta tabela, percebe-se que entre os quatro testes, a simulação computacional 3.F.1.B obteve a melhor aproximação no campo de tensões, com um erro percentual de aproximadamente 1,10%, enquanto que, no segundo teste (3.F.2.B), apresentou a maior diferença percentual absoluto de 1,25% para o mesmo campo.

Tabela 19- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELÍPTICAS

Três Inclusões Elípticas		3.T.1.B	3.F.2.B	3.F.1.B	3.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	3,6398	2,5444	5,9097	3,6356
	Deformação	0,014701	0,027411	0,01186	0,0080704
	Tensão	1283,4	2324,6	1041	176,79
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	3,6732	2,5181	5,8488	3,6729
	Deformação	0,014544	0,027743	0,011749	0,0079815
	Tensão	1268	2353,6	1052,4	174,81
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,92	1,03	1,03	0,92
	Deformação	1,07	1,21	0,94	1,10
	Tensão	1,20	1,25	1,10	1,12

As simulações computacionais 3.T.1.B e 3.C.1.B apresentaram aproximações, com variação percentual absoluto na ordem de 0,92% e 1,20%. Contudo, o terceiro experimento computacional apresentou a melhor diferença absoluto para o campo de deformações, com diferença de $1,11 \cdot 10^{-4}$, que representou 0,94% com relação a Estrutura Explícita. Já o percentual de erro para o campo de deslocamentos do mesmo teste, não foi o mais próximo, com diferença percentual de 1,03% (Figura 28).

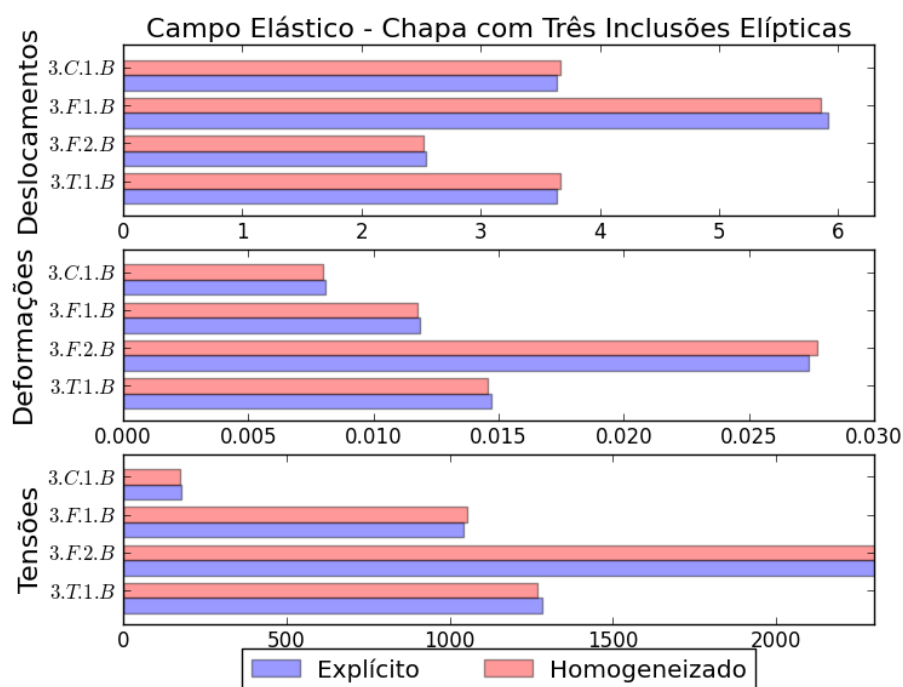


Figura 28- RESULTADOS CHAPA COM TRÊS INCLUSÕES ELÍPTICAS.

Os resultados obtidos para uma chapa retangular com três inclusões circulares estão expostos na Tabela 20. Estes valores mostraram que o campo de deslocamento para os testes 3.T.1.B e 3.C.1.B são iguais e apresentam uma alteração de $3,32 \cdot 10^{-2} mm$, na comparação entre as duas estruturas.

Tabela 20- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CIRCULARES

Três Inclusões Circulares		3.T.1.B	3.F.2.B	3.F.1.B	3.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	3,6534	2,5439	5,8614	3,6534
	Deformação	0,014554	0,027012	0,011646	0,0055743
	Tensão	1270	2291,7	1024	123,21
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	3,6202	2,5189	5,8027	3,6202
	Deformação	0,014394	0,026684	0,011778	0,0055187
	Tensão	1255,3	2264,1	1036,2	124,78
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,91	0,98	1,00	0,91
	Deformação	1,10	1,21	1,13	1,00
	Tensão	1,16	1,20	1,19	1,27

Analisando o teste 3.F.1.B, observa-se que os resultados para o campo de deformação

mostram um erro percentual absoluto de 1,00% com relação a Estrutura Explícita. E o segundo teste, teve aproximação no campo de deformação com diferença de $3,28 \cdot 10^{-4} mm$. Já para o campo tensorial, a simulação de um ensaio de tração apresentou diferença percentual de 1,19% (Figura 29).

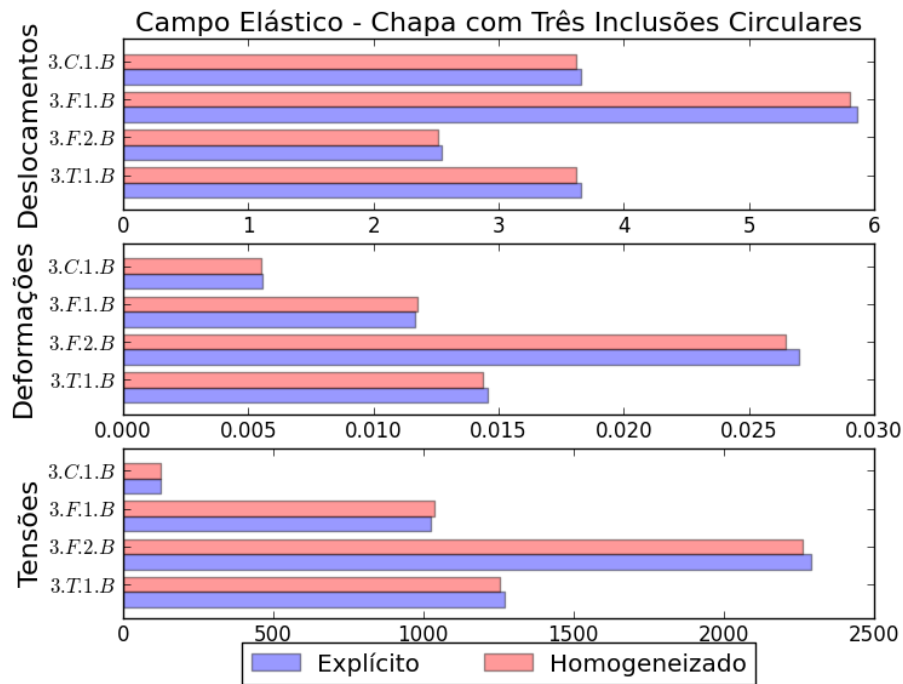


Figura 29- RESULTADOS CHAPA COM TRÊS INCLUSÕES CIRCULARES.

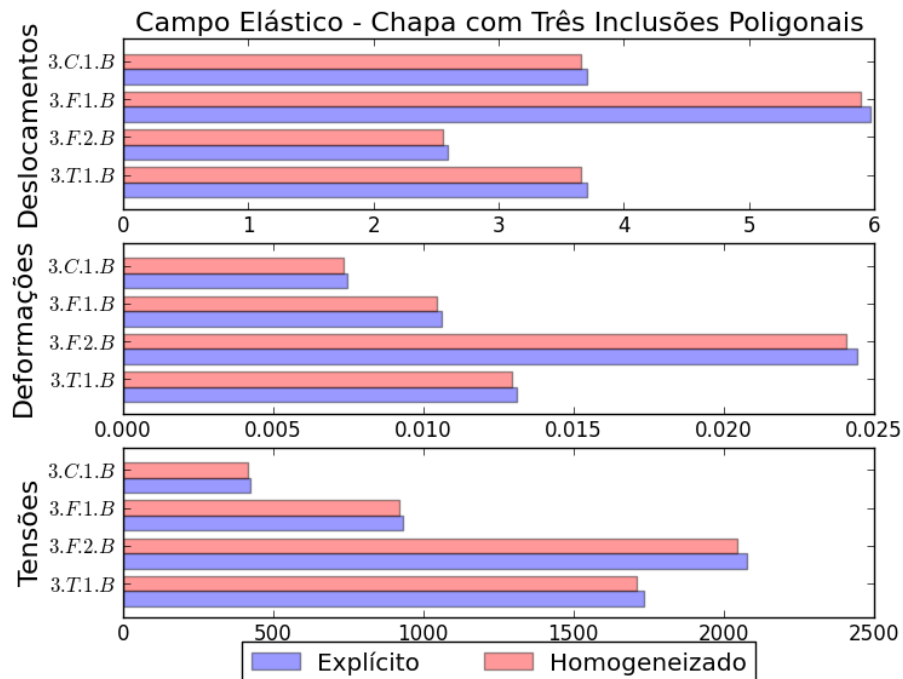
A Tabela 21 apresenta os resultados das simulações computacionais referentes a uma matriz retangular com três inclusões poligonais. Percebe-se que os testes 3.T.1.B, 3.F.1.B e 3.C.1.B obtiveram melhor aproximação para o campo de deslocamento, com erro percentual de 1,30%. Já o campo tensorial da simulação 3.C.1.B apresentou variação de 6,02 na comparação entre as estruturas compósitas.

Por outro lado, observando o segundo teste para os campos de deslocamento e tensão, obtiveram-se variações percentuais em torno de 1,49% e 1,50%.

Tabela 21- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS-TRÊS POLÍGONOS

Três Inclusões Poligonais		3.T.1.B	3.F.2.B	3.F.1.B	3.C.1.B
Estruturas Explícitas	Deslocamento	3,7017	2,5925	5,9725	3,7017
	Deformação	0,013102	0,024423	0,010592	0,0074531
	Tensão	1735,4	2074,8	931,44	422,03
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	3,6536	2,5518	5,8946	3,6536
	Deformação	0,012931	0,02406	0,0104364	0,0073459
	Tensão	1709,8	2043,6	917,92	416,01
Erro absoluto (%)	Deslocamento	1,30	1,57	1,30	1,30
	Deformação	1,31	1,49	1,47	1,44
	Tensão	1,48	1,50	1,45	1,43

Este conjunto de testes para o formato poligonal, apresentou variação de erro percentual de 1,30% a 1,57%, representando uma diferença de 0,27% nas simulações realizadas.

**Figura 30- RESULTADOS CHAPA COM TRÊS INCLUSÕES POLIGONAIS.**

5.4 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS COM ÚNICA INCLUSÃO

Nesta seção, são apresentados os valores obtidos por meio das simulações computacionais com uma inclusão imersa em um cubo.

Para inclusões no formato elipsoidal, os resultados apresentados na Tabela 22 mostram que os melhores valores para os campos de deslocamento e deformação foram obtidos nos testes 1.T.1.T e 1.C.1.T, com erro percentual de aproximadamente 0,88% de ambos deslocamentos e uma diferença absoluto de aproximadamente $1,86 \cdot 10^{-3}$ e $4,74 \cdot 10^{-4}$ para o campo de deformação.

Tabela 22- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM ELIPSOIDE

Inclusão Elipsoidal		1.T.1.T	1.F.2.T	1.F.1.T	1.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	9,6047	3,1044	3,5105	9,6048
	Deformação	0,21567	0,26093	0,060533	0,056172
	Tensão	18071	19481	4970,9	1046,8
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	9,5197	3,1397	3,4694	9,5197
	Deformação	0,21381	0,26409	0,059989	0,055698
	Tensão	18287	19733	5036	1058
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,88	1,14	1,17	0,88
	Deformação	0,86	1,21	0,90	0,84
	Tensão	1,20	1,29	1,31	1,07

Observando os campos de deslocamento, deformação e tensão para o terceiro e o quarto testes, percebe-se que o 1.F.1.T tem melhor aproximação apenas no campo de deformação, com uma diferença percentual de 0,90%.

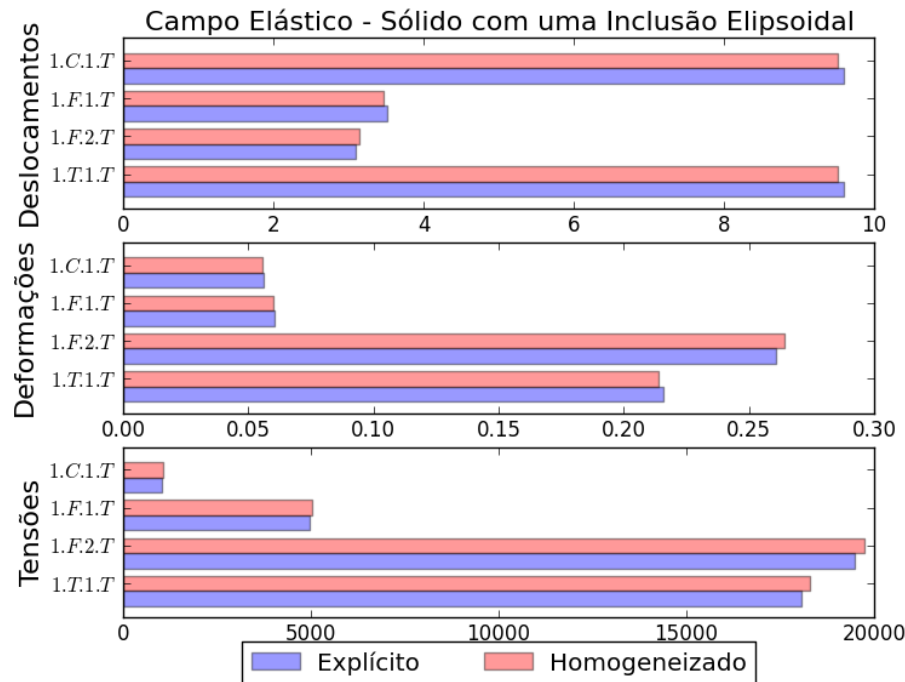


Figura 31- RESULTADOS SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO ELIPSOIDAL.

A Tabela 23 contém os resultados dos testes da inclusão tridimensional no formato esférico. Com isso, percebe-se que as melhores aproximações estão no primeiro teste, com diferenças de $7,63 \cdot 10^{-2}mm$, $1,76 \cdot 10^{-3}$ e $1,76 \cdot 10^2$ para os campos de deslocamento, deformação e tensão respectivamente, entre as duas estruturas. A quarta simulação (1.C.1.T) contém uma das melhores aproximações do campo de deslocamento representando um erro percentual de 0,83%.

Tabela 23- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ESFERA

Inclusão Esférica		1.T.1.T	1.F.2.T	1.F.1.T	1.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	9,6104	7,5141	3,4746	9,6099
	Deformação	0,20391	0,31498	0,062423	0,042039
	Tensão	16790	25280	5185,9	973,95
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	9,5341	7,4264	3,4355	9,5306
	Deformação	0,20215	0,31145	0,06307	0,042457
	Tensão	16614	24929	5120,8	986,7
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,79	1,17	1,13	0,83
	Deformação	0,86	1,12	1,04	0,99
	Tensão	1,05	1,39	1,26	1,31

Por meio da Figura 32, pode-se observar que os valores com maior diferença estão na simulação 1.F.2.T, com diferença de $8,77 \cdot 10^{-2}mm$; $3,53 \cdot 10^{-3}$ e $3,51 \cdot 10^2$ para os campos de

deslocamento, deformação e tensão, respectivamente.

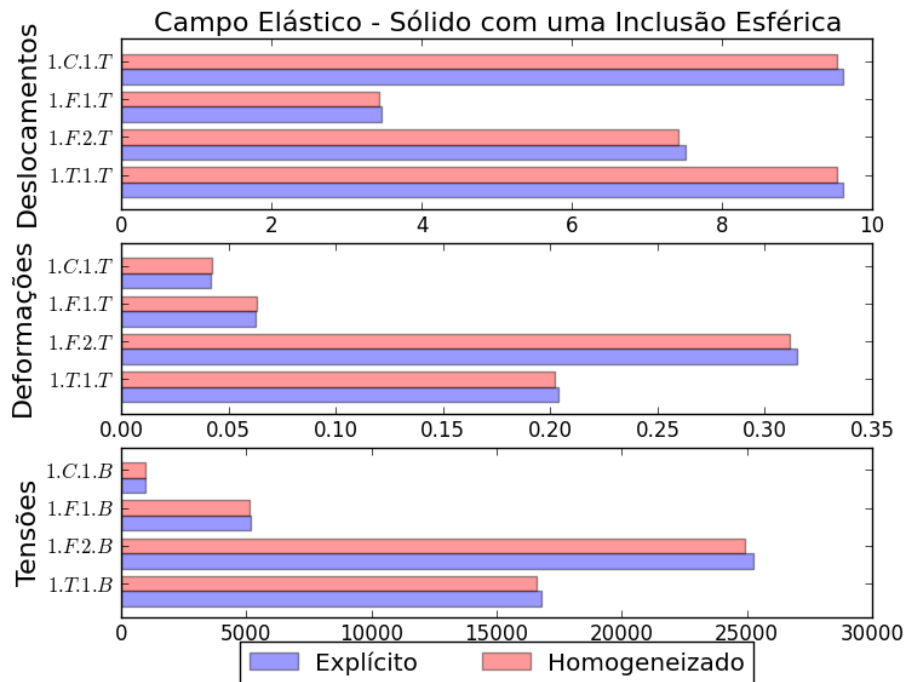


Figura 32- RESULTADOS SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO ESFÉRICA.

A Tabela 24 apresenta os resultados encontrados para uma inclusão no formato cilíndrico. Analisando os valores para o campo tensorial de cada teste, pode-se afirmar que a melhor aproximação ocorreu no primeiro teste, exibindo um percentual absoluto de erro de 1,19%. Já nos campos tensoriais dos testes 1.F.2.T e 1.F.1.T encontram-se as maiores variações, na ordem de aproximadamente 1,35% e 1,39%, respectivamente.

Tabela 24- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM CILINDRO

Inclusão Cilíndrica		1.T.1.T	1.F.2.T	1.F.1.T	1.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	9,6047	1,7045	3,4865	9,6047
	Deformação	0,223	0,052917	0,05962	0,058443
	Tensão	18308	4628,4	5246,5	2747,6
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	9,5265	1,6879	3,4538	9,5265
	Deformação	0,22502	0,052234	0,058972	0,05796
	Tensão	18525	4565,7	5319,4	2710,8
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,81	0,97	0,94	0,81
	Deformação	0,91	1,29	1,09	0,83
	Tensão	1,19	1,35	1,39	1,34

O segundo teste (1.F.2.T) possui diferença no campo de deslocamento igual a $6,83 \cdot 10^{-4} mm$ correspondente a um erro percentual de 1,29%, que é o maior valor de diferença nesse campo (Figura 33).

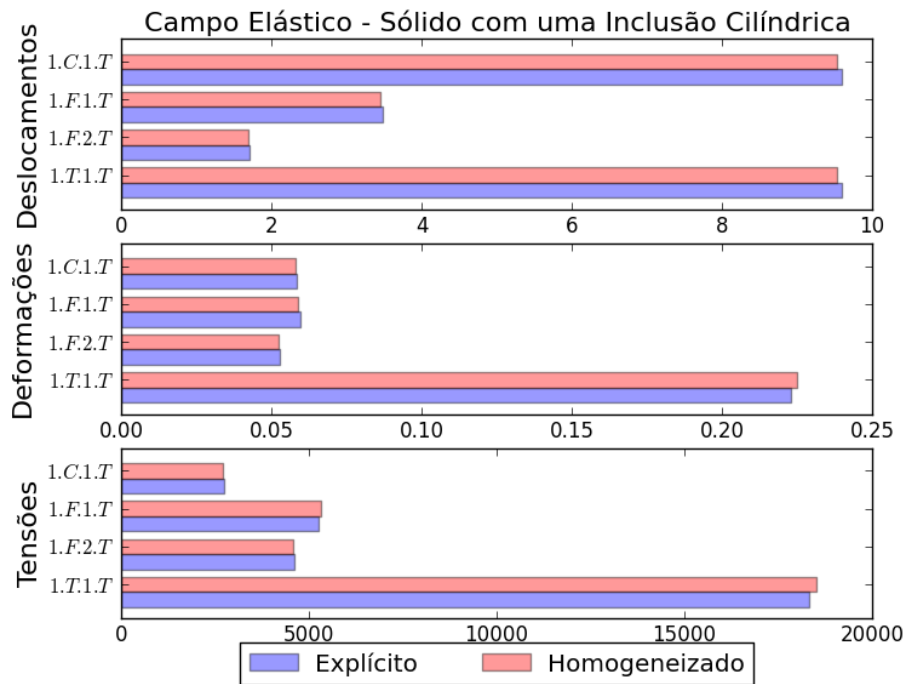


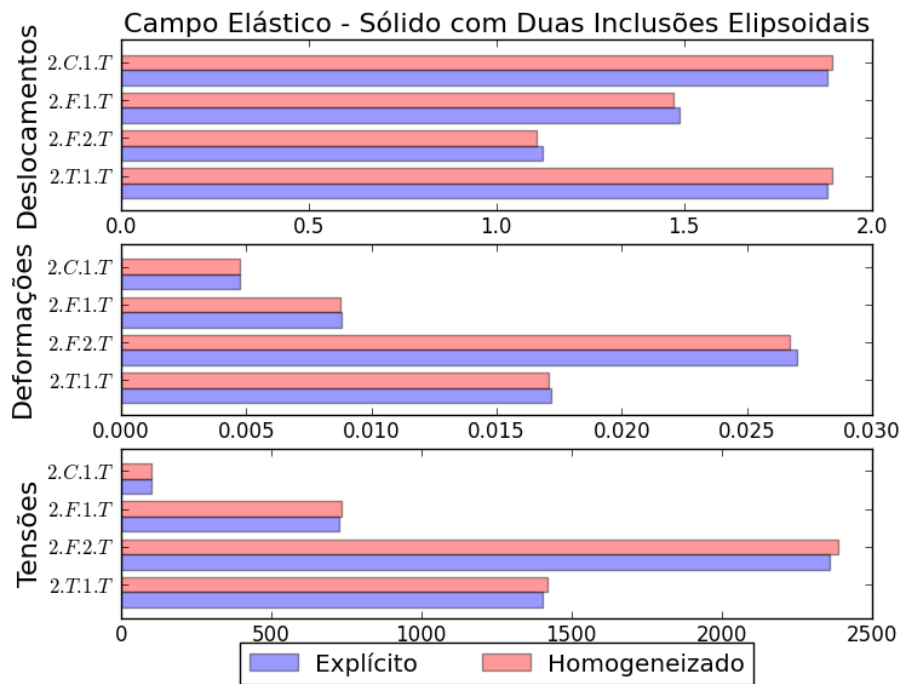
Figura 33- RESULTADOS SÓLIDO COM UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA.

5.5 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS COM DUAS INCLUSÕES

Esta seção abrange os testes computacionais com duas inclusões imersas em um sólido retangular. Avaliando o formato de inclusão elipsoidal, a simulação que representa um ensaio de tração e de compressão são as que obtém os melhores resultados para os campos de deslocamento e deformação (Tabela 25).

Tabela 25- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS ELIPSOIDES

Duas Inclusões Elipsoidais		2.T.1.T	2.F.2.T	2.F.1.T	2.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	1,8792	1,1212	1,4884	1,8792
	Deformação	0,017195	0,027016	0,0088715	0,0047215
	Tensão	1403,4	2357,1	724,56	100,67
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	1,8949	1,10645	1,4694	1,8949
	Deformação	0,017066	0,0267	0,0087808	0,0047621
	Tensão	1421,2	2386,2	734,25	101,89
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,84	1,32	1,28	0,84
	Deformação	0,75	1,17	1,02	0,86
	Tensão	1,27	1,23	1,34	1,21

**Figura 34- RESULTADOS SÓLIDO COM DUAS INCLUSÕES ELIPSOIDAIIS.**

Comparando os experimentos computacionais 2.F.2.T e 2.F.1.T, verifica-se que, quando existe apenas uma condição de contorno, os resultados foram melhores em quase todos os campos, apresentando no campo de deformação um erro percentual igual a 1,02%, enquanto que, no segundo teste com dois engastes, esse percentual aumentou para 1,17%. Já, fazendo uma análise do campo tensorial, tem-se que, no quarto e no segundo testes, a diferença absoluto entre as estruturas foram de 1,22 e 29,1, respectivamente. Os valores encontrados para este

formato de inclusão podem ser observados na Figura 34.

A Tabela 26, apresenta os resultados obtidos nos testes computacionais com um sólido e duas inclusões esféricas. Neste caso, tem-se que as melhores aproximações para o campo de deslocamento estão em torno de 0,71% tanto para o teste 2.T.1.T, quanto para 2.C.1.T. Já a diferença absoluto nestes mesmos testes para o campo de deformação é de $2,29 \cdot 10^{-4}$ e $4,91 \cdot 10^{-5}$ respectivamente. O terceiro teste (2.F.1.T) possuiu maior diferença para os deslocamentos e deformações do que nos testes citados anteriormente, sendo o erro percentual do campo de deslocamento é de aproximadamente 1,09%, enquanto, para o campo de deformação, a diferença absoluto é igual a $9,69 \cdot 10^{-5}$.

Tabela 26- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ESFERAS

Duas Inclusões Esféricas		2.T.1.T	2.F.2.T	2.F.1.T	2.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,0111	1,171	1,5201	2,0111
	Deformação	0,021878	0,02553	0,0099151	0,0056737
	Tensão	1835	2227,1	810,03	358,18
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	1,9968	1,15766	1,5035	1,9968
	Deformação	0,021649	0,02525	0,0098182	0,0057228
	Tensão	1856,4	2255,9	819,71	354,56
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,71	1,14	1,09	0,71
	Deformação	1,05	1,10	0,98	0,87
	Tensão	1,17	1,29	1,20	1,01

Com isso, o segundo teste apresenta as maiores diferenças de comparação entre as estruturas para este formato e quantidade de inclusões (Figura 35), dentre os campos desta simulação, a Estrutura Homogeneizada que melhor se aproxima da Estrutura Explícita é o campo de deformações, com diferença de $2,8 \cdot 10^{-4}$.

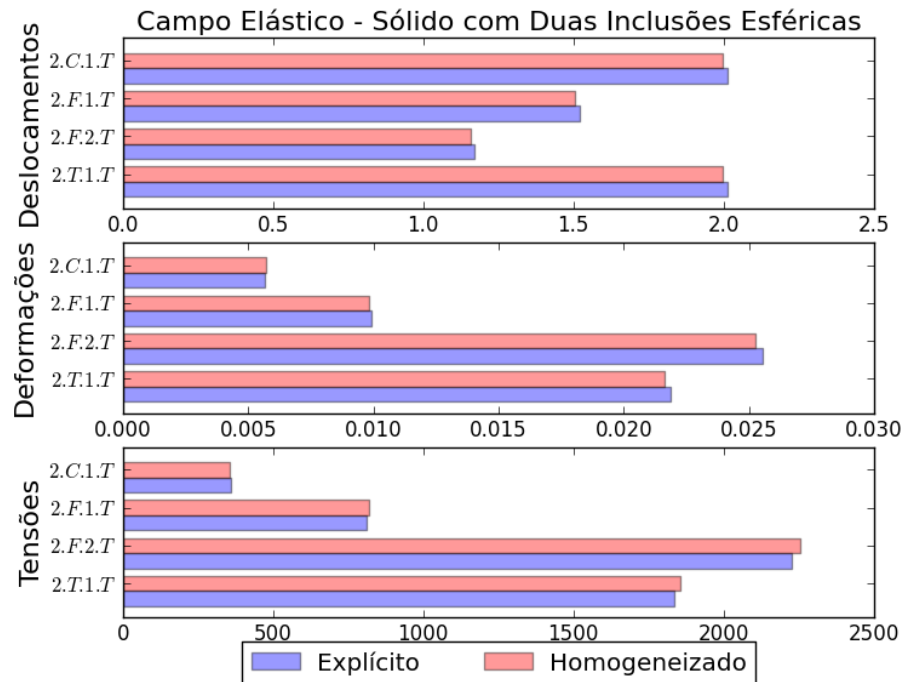


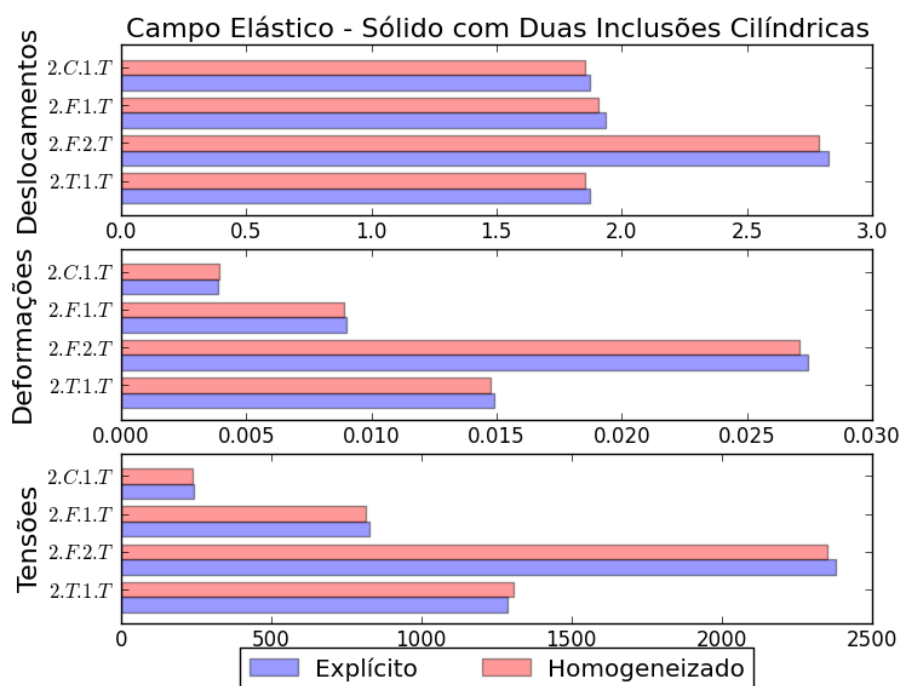
Figura 35- RESULTADOS SÓLIDO COM DUAS INCLUSÕES ESFÉRICAS.

Os últimos testes com duas inclusões foram realizados com compósitos cujas inclusões eram no formato cilíndrico. Os resultados obtidos estão na Tabela 27 e mostram que a melhor aproximação para o campo de deformação aconteceu no compósito quando simulado um ensaio de compressão, ou seja, no teste 2.C.1.T, com erro absoluto de $3,56 \cdot 10^{-5}$. Para o campo de deslocamento da mesma simulação, os resultados encontrados possuem uma diferença de $1,68 \cdot 10^{-2}mm$ sendo o melhor obtido destes ensaios computacionais (Figura 36).

O teste 2.T.1.T possui diferença de $1,71 \cdot 10^{-2}mm$ para o campo de deslocamento, correspondendo a um erro percentual de 0,91%; o segundo teste apresentou maior variação do que as outras simulações para os deslocamentos e deformações, de aproximadamente $3,67 \cdot 10^{-2}$ e $3,33 \cdot 10^{-4}$, respectivamente.

Tabela 27- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS CILINDROS

Duas Inclusões Cilíndricas		2.T.1.T	2.F.2.T	2.F.1.T	2.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	1,8708	2,8251	1,9331	1,8705
	Deformação	0,014909	0,027452	0,0090196	0,0038726
	Tensão	1287,5	2379,4	826,01	241,24
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	1,8537	2,78845	1,90814	1,8537
	Deformação	0,014767	0,027119	0,0089215	0,0039082
	Tensão	1305,2	2352,3	814,9	237,94
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,91	1,30	1,29	0,90
	Deformação	0,95	1,21	1,09	0,92
	Tensão	1,37	1,14	1,35	1,37

**Figura 36- RESULTADOS SÓLIDO COM DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.**

5.6 MATERIAIS IDEALIZADOS TRIDIMENSIONAIS COM TRÊS INCLUSÕES

As simulações com três inclusões serão analisadas nesta seção, para os formatos de inclusão definidos anteriormente: elipsoidal, esférico e cilíndrico.

Para o formato elipsoidal, os valores obtidos com a comparação estão exibidos na

Tabela 28. Com isso, é possível observar que as melhores aproximações para o campo de deslocamentos acontece no teste 3.T.1.T, com diferenças de, respectivamente, $2,68 \cdot 10^{-2} mm$. Contudo, a simulação que representa um ensaio de compressão apresenta a menor diferença entre as duas estruturas no campo de deformações, em torno de $3,96 \cdot 10^{-5}$.

Tabela 28- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELIPSÓIDES

Três Inclusões Elipsoidais		3.T.1.T	3.F.2.T	3.F.1.T	3.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,8188	1,9568	4,3328	2,8186
	Deformação	0,020997	0,030951	0,012756	0,00483
	Tensão	1767,3	2751,2	1066,9	106,08
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,8456	1,9312	4,2903	2,8486
	Deformação	0,020768	0,030568	0,012895	0,0047904
	Tensão	1746,4	2720,5	1080,2	107,55
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,95	1,31	0,98	1,06
	Deformação	1,09	1,24	1,09	0,82
	Tensão	1,18	1,12	1,25	1,39

Os experimentos 3.T.1.T e 3.F.1.T, possuiu erro percentual absoluto para a deformação de aproximadamente 1,09%. Já a simulação do ensaio de flexão biengastado apresenta erros relativos médios cerca de 1,28% para o campo de deslocamento e deformação. Os valores referentes a comparação das estruturas homogeneizadas explícitas para esse formato de inclusão estão representados na Figura 37

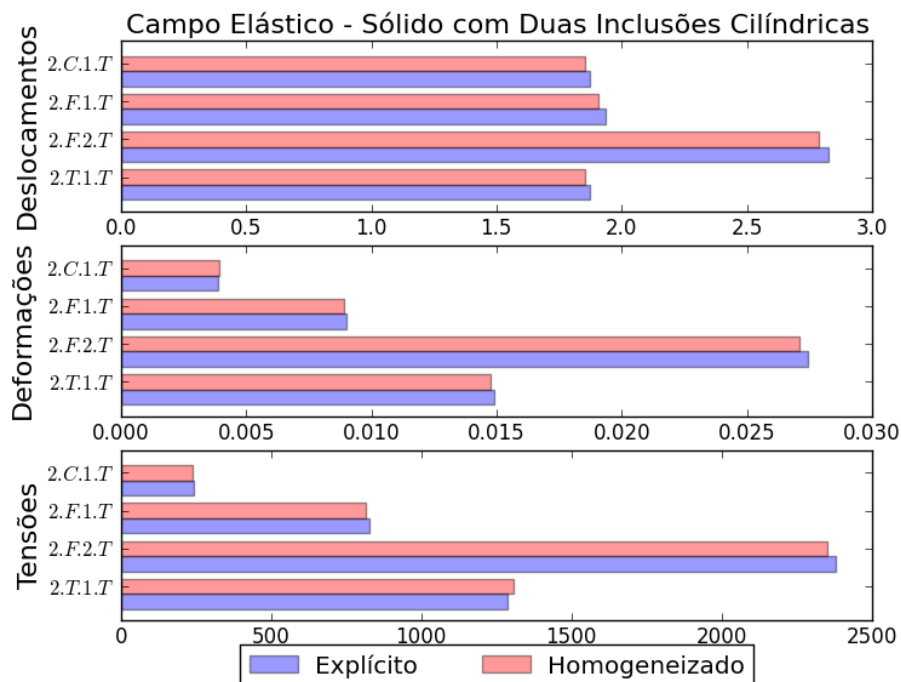


Figura 37- RESULTADOS SÓLIDO COM TRÊS INCLUSÕES ELIPSÓIDAIAS.

A Tabela 29 abrange os resultados obtidos para um sólido com três inclusões esféricas. Observa-se que o terceiro e o quarto teste possuem diferença absoluta no campo de tensões igual a 14,8 e 1,41. Já, para o campo de deslocamento os testes 3.T.1.T e 3.C.1.T mostraram aproximação de $2,69 \cdot 10^{-2} mm$ para ambos os testes.

Observando os resultados para o campo de deformação, a simulação do ensaio de compressão apresentou a menor diferença entre as estruturas de $4,42 \cdot 10^{-5}$, representando erro percentual de 0,87%.

O teste 3.F.2.T apresentou resultados com erros relativos mais elevados nos campo de deslocamento e tensão, na ordem percentual de 1,22% e 1,39%, respectivamente (Figura 38).

Tabela 29- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ESFERAS

Três Inclusões Esféricas		3.T.1.T	3.F.2.T	3.F.1.T	3.C.1.T
Estruturas Explícitas	Deslocamento	2,8138	1,9505	4,3276	2,8138
	Deformação	0,018176	0,028734	0,013229	0,0050656
	Tensão	1494,3	2547,6	1087	106,24
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,7869	1,9267	4,2842	2,7869
	Deformação	0,017984	0,028446	0,013365	0,0050214
	Tensão	1514,7	2582,9	1072,2	107,65
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,96	1,22	1,00	0,96
	Deformação	1,06	1,00	1,03	0,87
	Tensão	1,37	1,39	1,36	1,33

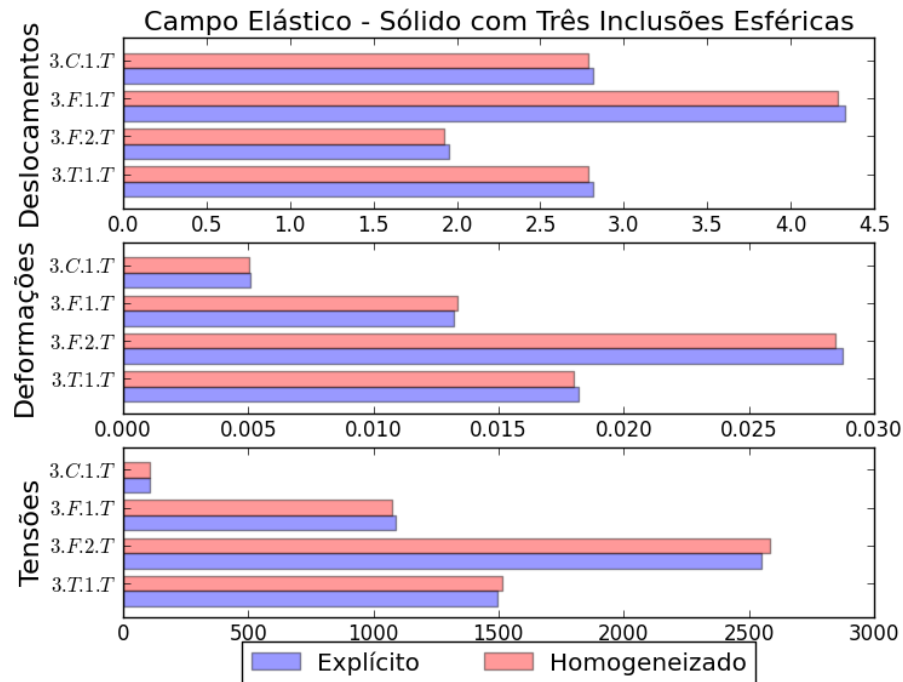


Figura 38- RESULTADOS SÓLIDO COM TRÊS INCLUSÕES ESFÉRICAS.

O último teste aconteceu com inclusões no formato cilíndrico. Na Tabela 30, encontram-se os resultados obtidos para as quatro simulações computacionais, na qual pode-se observar que as melhores aproximações para os campos de deslocamento e deformação aconteceram na simulação 3.T.1.T, apresentando diferença de deslocamento igual a $2,75 \cdot 10^{-2}mm$ e erro percentual absoluto de deformação de 0,74%. Entretanto, o campo tensorial da simulação 3.C.1.T teve o menor erro percentual absoluto de 1,02%.

Tabela 30- RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CILINDROS

Três Inclusões Cilíndricas		3.T.1.T	3.F.2.T	3.F.1.T	3.C.1.T
Estruturas Explicitas	Deslocamento	2,9627	2,023	4,3774	2,9627
	Deformação	0,019445	0,028988	0,012974	0,008871
	Tensão	1844,5	2608,4	1044,5	1305,7
Estruturas Homogeneizadas	Deslocamento	2,9352	1,9948	4,3317	2,9252
	Deformação	0,019589	0,028639	0,013126	0,0087791
	Tensão	1867,8	2644,6	1058,7	1310,03
Erro absoluto (%)	Deslocamento	0,93	1,39	1,04	1,27
	Deformação	0,74	1,20	1,17	1,02
	Tensão	1,26	1,39	1,36	1,02

Observando as aproximações para os testes 3.F.2.T e 3.F.1.T, verifica-se que a simulação do ensaio de flexão em balanço mostrou-se mais eficaz, contendo uma diferença nos campos

de deslocamento, deformação e tensão de $4,57 \cdot 10^{-2} mm$, $1,52 \cdot 10^{-4}$ e 14,2. Os resultados do segundo teste apresentaram maior diferença na comparação entre as quatro Estruturas Explícitas e as Estruturas Homogeneizadas (Figura 39).

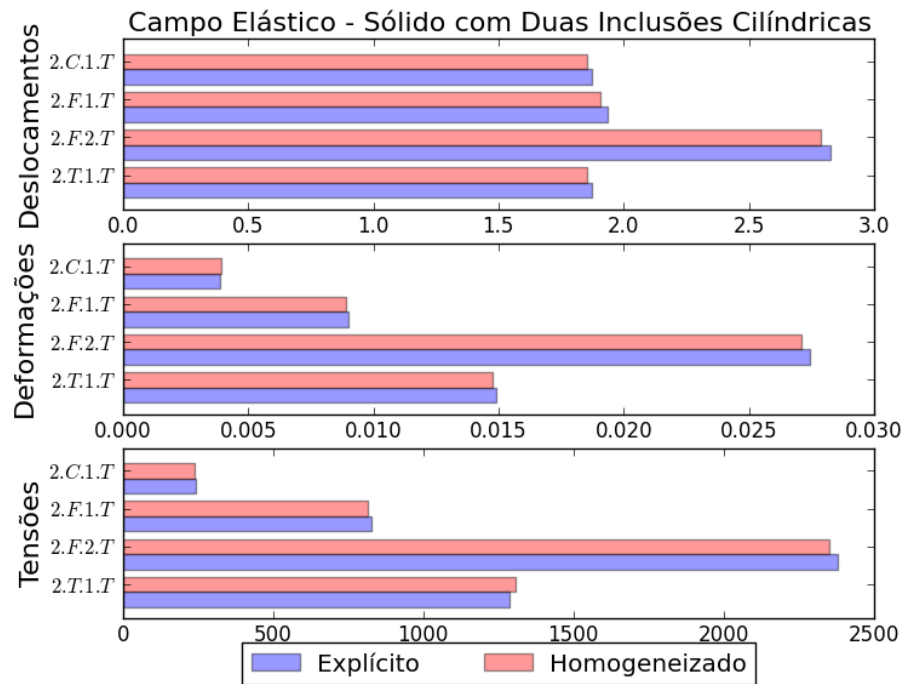


Figura 39- RESULTADOS SÓLIDO COM TRÊS INCLUSÕES CILÍNDRICAS.

6 DISCUSSÕES

Compreender o comportamento de compósitos utilizando um método que descreve as propriedades de materiais heterogêneos, por meio de um material homogêneo com propriedades mecânicas equivalentes é de valia em várias condições (ALMEIDA et al., 2010; FREITAS et al., 2003; KLUSEMANN; SVENDSEN, 2010; KOVAL, 2003; MENG et al., 2012; OGIERMAN; KOKOT, 2013). A análise das estruturas de diversos formatos de inclusões, com diferentes condições de contorno e carregamento faz-se necessária, pois permite avaliar a qualidade da aproximação que cada formato e condições de contorno oferece.

Com relação aos resultados obtidos neste trabalho, por meio do Método de Homogeneização de Mori-Tanaka, mostrou-se que é possível obter aproximações bidimensionais e tridimensionais satisfatórias. Com isso, percebe-se que as simulações de ensaio de tração tanto bidimensionais, quanto tridimensionais obtiveram os melhores resultados na maioria dos modelos idealizados, seguidos das simulações dos ensaios de compressão. Em alguns casos, como por exemplo, nos compósitos com duas inclusões esféricas ou o compósito quadrado com três inclusões elípticas, a simulação do ensaio de compressão mostrou melhores aproximações do que a simulação do ensaio de tração. Resultando assim que, a maioria dos erros obtidos para as simulações axiais ocorrem na ordem de 0,83% e 1,4%. Por outro lado, a simulação do ensaio de flexão biengastado para ambas as dimensões, obteve aproximações de menor desempenho, seguida do ensaio de flexão em balanço. Com isso, para as simulações do ensaio de flexão, os erros obtidos estão na ordem de 0,96% e 1,55%. Isso ocorre pois, nos ensaios com apenas uma condição de apoio as inclusões estão com o seu centro geométrico exatamente na linha neutra, portanto na região com baixa intensidade de tensões.

Com relação ao campo de deslocamentos, observando os valores encontrados com as simulações computacionais bidimensionais, verifica-se uma diferença na comparação entre as duas estruturas em torno de 0,82% e 1,57%. O experimento computacional de um compósito com três inclusões poligonais de uma simulação do ensaio de flexão biengastado, foi o teste que apresentou a maior variação nesse campo. As aproximações de um compósito com uma inclusão circular e simulação do ensaio de tração mostram as menores diferenças.

Os valores encontrados para os campos de deformações bidimensionais, exibiram me-

lhores comparações entre as estruturas da simulação do ensaio de tração, para a maioria das simulações. Destaca-se com menor diferença o compósito com uma inclusão elíptica imersa, com aproximadamente 0,83% de diferença. Já a maioria dos testes com inclusões poligonais hexagonais, mostraram menor desempenho se comparado com outros formatos de inclusões para esse mesmo campo.

Para os campos tensoriais bidimensionais, observa-se que o percentual de erro aumenta com relação aos outros campos. Os valores encontrados dos compósitos para a simulação do ensaio de compressão apresentaram os melhores resultados. Com isso, observa-se que o compósito com uma inclusão circular obteve o menor erro percentual, cerca de 0,81%. Já os compósitos com inclusões poligonais hexagonais mostraram diferença percentual na ordem de 1,33% e 1,50%.

Os experimentos tridimensionais realizados mostram que os valores encontrados para o campo de deslocamento, possuem diferença na comparação entre as duas estruturas em torno de 0,71% e 1,30% na sua maioria. Observando melhores aproximações nas simulações dos ensaios axiais de tração e compressão para compósitos idealizados com inclusões esféricas.

Analisando os campos de deformações tridimensionais dos compósitos idealizados, é possível verificar que os valores das simulações axiais de tração e compressão mostraram menor diferença entre as Estruturas Explícitas e as Estruturas Homogeneizadas na ordem de aproximadamente 0,75% e 1,29%, demonstrando maior desempenho nos compósitos com única inclusão.

Os campos tensoriais tridimensionais, apresentaram aumento percentual na diferença da comparação entre as estruturas, com relação aos outros campos. Este percentual de erro entre os resultados obtidos variam na ordem de 1,01% e 1,39%, mostrando melhor desempenho nas simulações com uma única inclusão e nas simulações dos ensaios axiais de tração e compressão, na maioria dos testes.

Realizando uma análise da variação do formato das inclusões bidimensionais com os resultados obtidos nas simulações, nota-se que os formatos circulares e elipsoidais apresentaram melhor desempenho nas comparações. As simulações para o formato poligonal, também mostrou resultados aceitáveis, porém, devido a concentração de tensão nos vértices da geometria da inclusão e a formulação matemática, as aproximações desse formato geraram resultados com índices percentuais maiores.

Observando a variação no formato das inclusões tridimensionais e as comparações obtidas, ressalta-se que na maioria das simulações os melhores resultados estão vinculados ao

formato esférico e elipsoidal, não implicando em baixo desempenho do formato cilíndrico, pois também obtiveram-se resultados satisfatórios nas simulações computacionais.

Por fim, as aproximações sugeridas e encontradas no decorrer do trabalho possibilitam uma boa avaliação do comportamento dos diferentes formatos de inclusões e condições de fronteira.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A discussão dos resultados encontrados permite concluir que os objetivos do trabalho foram alcançados, pois foi possível analisar o comportamento dos compósitos bifásicos isotrópicos idealizados, por meio do Método de Homogeneização Clássica de Mori-Tanaka, considerando casos bidimensionais e tridimensionais com diferentes condições de contorno e carregamento.

Pode-se concluir que o Método de Homogeneização de Mori-Tanaka mostrou as melhores aproximações nos testes com compósitos engastados e simulações com carregamento de tração, seguidos dos testes de simulação de ensaio de compressão. A terceira simulação não se aproximou tanto quanto os dois testes descritos acima; no entanto, trouxe resultados satisfatórios. Já a segunda simulação, com carregamento de flexão e compósito biengastado acompanham os maiores percentuais de erro.

Considerando o formato das inclusões para os casos bidimensionais, as inclusões circulares e elípticas representaram as melhores aproximações. Com isso, o formato poligonal hexagonal, que apresenta concentração de tensão nos vértices e demanda uma formulação mais elaborada para o Tensor de Eshelby, apresenta os maiores percentuais de erro. Para os casos tridimensionais o formato esférico e elipsoidal representam as melhores aproximações, o que não implica em um desempenho insatisfatório do formato cilíndrico.

Sendo assim, é possível afirmar que o formato da inclusão, as dimensões da matriz e inclusão, as condições de contorno e carregamento influenciam no desempenho do método, de maneira a obter melhores aproximações quando estes fatores são analisados e relacionados.

8 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Análise de compósitos homogeneizados via Método de Mori-Tanaka, com mais de um formato de inclusão em uma mesma matriz sujeita a diferentes condições de contorno e carregamento, que podem ser realizadas por meio comparações entre simulações computacionais de Estruturas Explícitas com Estruturas Homogeneizadas;
- Avaliação do desempenho do compósito homogeneizado, meio a inclusões com diferentes tamanhos;
- Análise de compósitos homogeneizados via Método de Mori-Tanaka com formatos de inclusões irregulares, isso pode ser realizado através de simulações computacionais e uma análise do desempenho destes formatos de inclusões comparadas com o desempenho dos formatos regulares;
- Avaliação comparativa dos distintos Métodos de Homogeneização para diferentes formatos de inclusões e condições de contorno e carregamento;
- Realização de ensaios experimentais, afim de qualificar os erros obtidos;
- Analisar o efeito da inclusão modificando suas posições dentro da matriz, com diferentes condições de contorno e carregamento.

REFERÊNCIAS

- ALEJANDRO, L. F. G. **Bases para el Diseño de Prótesis de Hombros**. Dissertação (Mestrado) — Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico - Departamento de Ingeniería Mecánica de Cuernavaca, 2012.
- ALMEIDA, P. A. et al. Avaliação numérica do erro de modelagem global em estruturas constituídas por materiais heterogêneos. **Asociación Argentina de Mecánica Computacional**, XXIX, p. 8171–8185, 2010. Mecánica Computacional.
- ANSYS, INC. **Meshing Help**. [S.l.], 2009. Disponível em: <<http://www.ansys.com>>.
- ARAÚJO, M. A. R. C. **Análise de Modelos de Constante Dielétrica para Materiais Compósitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Minho, Outubro 2012. Disponível em: <<http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/22720>>.
- ARGENTA, M. A. **Metodologia para a simulação computacional do comportamento mecânico de estruturas trabeculares ósseas específicas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Paraná, Brasil, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1884/26047>>.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizado aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas**. Tese, Junho 2009.
- ASSAN, A. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2ª ed. [S.l.]: Ed. da UNICAMP, 2003. (Livro texto). ISBN 9788526806238.
- BARBOSA, A. H. **Contribuição ao estudo sobre a obtenção do módulo de elasticidade do concreto utilizando modelagem micromecânica**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, Outubro 2010.
- BARBOSA, A. H.; LOPEZ-YANEZ, P. A.; CARNEIRO, A. M. P. Contribuição à obtenção do módulo de elasticidade do concreto utilizando modelagem micromecânica. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 4, n. 5, p. 845–881, Dez. 2011. ISSN 1983-4195.
- BARROS, F. B. **Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas**. Tese, Março 2002.
- BATHE, K. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice Hall, 1996. ISBN 097900490X , 978-0979004902.
- BELYTSCHKO, T.; FISH, J. **A First Course in Finite Elements**. [S.l.: s.n.], 2007. ISBN 978-0-470-03580-1.
- BENVENISTE, Y. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. Elsevier Science Publishers, v. 6, n. 2, p. 147–157, 1987. ISSN 0167-6636. Disponível em: <<http://www.ewp.rpi.edu/hartford/ernesto/S2014/EP/MaterialsforStudents/Pendley/Benveniste1987.pdf>>.

BOARI, Z. M. **Modelo matemático da influência da distribuição de partículas de sic nas tensões térmicas em compósitos de matriz metálica**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares Autarquia Associada à Universidade de São Paulo - IPEN, 2003.

BÖHM, H. J. **Continuum Micromechanics of Materials**. Institut für Leichtbau und Struktur-Biomechanik TU Wien, 2010. Disponível em: <<http://www.ilsb.tuwien.ac.at/stud/downloads/CompEng/cmpeCourseNotes1011.pdf>>.

CAVALCANTE, M. A. A. **Modelagem do Comportamento termo-mecânico transiente de estruturas de materiais compósitos pela teoria de volumes finitos**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Civil, UFAL, 2006.

CHEN, Y.-z. Closed form solution and numerical analysis for eshelby's elliptic inclusion in plane elasticity. **Applied Mathematics and Mechanics**, Shanghai University, v. 35, n. 7, p. 863–874, 2014. ISSN 0253-4827. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10483-014-1831-9>>.

CORDEIRO, M. F. **Um estudo do método de homogeneização assintótica visando aplicações em estruturas ósseas**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, 2009.

DUTRA, R. J. **Avaliação Numérica e Experimental de Compósitos Sanduíche feitos com Serragem e Fibras de Piaçava**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del-Rei, 2014.

DUTRA, V. F. P. **Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

DVORAK, G. **Micromechanics of Composite Materials**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2012. (Solid Mechanics and Its Applications). ISBN 9789400741010.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 241, n. 1226, p. 376–396, Aug. 1957. ISSN 0080-4630. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/100095>>.

FERNÁNDEZ, M. V. **Estudo comparativo numérico-experimental da dureza de cerâmicas tipo PZT**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, Julho 2012.

FREITAS, F. A. C.; SOARES, J. B.; SOUZA, F. V. Princípios de homogeneização aplicados em uma mistura asfáltica considerada como um compósito elástico. In: TRANSPORTES, X. C. de Ensino e Pesquisa em (Ed.). **ANPET**. [S.l.: s.n.], 2003. v. 1, p. 1–10.

GAO, X. L.; MA, H. M. Green's function and eshelby's tensor based on a simplified strain gradient elasticity theory. **Acta Mechanica**, Springer Vienna, v. 207, n. 3-4, p. 163–181, 2009. ISSN 0001-5970. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00707-008-0109-4>>.

GOMMERS, B.; VERPOEST, I.; HOUTTE, P. V. The mori-tanaka method applied to textile composite materials. **Acta Materialia**, v. 46, n. 6, p. 2223 – 2235, 1998. ISSN 1359-6454. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645497002966>>.

HUGHES, T. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. [S.l.]: Dover Publications, 2000. ISBN 9780486411811.

JÚNIOR, A. S. **Um estudo sobre estimativas de erro de modelagem em estruturas de materiais heterogêneos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Maciô, outubro 2008.

KAWASHITA, M.; NOZAKI, H. Eshelby tensor of a polygonal inclusion and its special properties. 2001.

KLUSEMANN, B.; BÖHM, H. J.; SVENDSEN, B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites with non-elliptical reinforcements: Comparisons and benchmarks. v. 24, n. 21-37, 2012.

KLUSEMANN, B.; SVENDSEN, B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. v. 30, n. 4, p. 374-386, 2010.

KOVAL, G. J. **Aplicação da teoria da homogeneização em materiais compósitos viscoelásticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Agosto 2003.

KUBO, S. et al. Estimation of distributions of eigen-strains based on their decomposition into compatible and incompatible components. In: **Proceedings of IPE III: Inverse Problems in Engineering III**. [S.l.: s.n.], 1999. p. 13-18.

KURUKURI, S. A review of homogenization techniques for heterogeneous materials. 2004.

KUZNETSOV, S. **Homogenization Methods for Problems with Multiphysics, Temporal and Spatial Coupling**. Dissertação, 2012. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1002/AC:P:13697>>.

LAI, W. et al. **Introduction to Continuum Mechanics**. 3°. ed. [S.l.]: Elsevier Science, 2009. ISBN 9780080942520.

LI, S.; SAUER, R. A.; WANG, G. The eshelby tensors in a finite spherical domain - part i: theoretical formulations. **Journal ASME**, v. 74, n. 770, julho 2007.

LIU, M. **Strain Gradient Solutions of Eshelby-Type Problems for Polygonal and Polyhedral Inclusions**. Tese (Doutorado) — Texas A and M University, December 2011.

LORENCI, G. V. S. **Formulação micromecânica do comportamento poroelástico de um meio rochoso fraturado**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil, 2013.

MA, H. **Solutions of Eshelby-type inclusion problems and a related homogenization method based on a simplified strain gradient elasticity theory**. Tese (Doutorado) — Tongji University, Shanghai, China., May 2010.

MA, H.; GUO, Z.; QIN, Q. Two-dimensional polynomial eigenstrain formulation of boundary integral equation with numerical verification. **Applied Mathematics and Mechanics**, Shanghai University Press, v. 32, n. 5, p. 551-562, 2011. ISSN 0253-4827. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10483-011-1437-x>>.

MELO, C. F.; ARGENTA, M. A. Avaliação da aproximação de inclusões nas arestas da matriz de um compósito bifásico. **CILAMCE - XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, Novembro 2014. ISSN 217-4949.

MELO, C. F.; ARGENTA, M. A. Estimativa dos efeitos da aproximação das inclusões nas condições de contorno de um material bifásico. **CNMAI - Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria**, Novembro 2014.

MENG, C.; WILL, H.; POLLARD, D. Evaluation of the eshelby solution for the ellipsoidal inclusion and heterogeneity. **Journal Computers and Geosciences**, v. 40, p. 40–48, 2012. ISSN 0098-3004. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300411002378>>.

MERCURI, E. G. F. **Modelagem multiescala de tecidos mineralizados considerando a micromecânica da dinâmica celular**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Paraná, Brasil, 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/1884/34677>>.

MORAES, D. H. **Análise Numérica de Falha em Laminados Compósitos Utilizando Modelagem Multiescala**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Mecânica, 2014.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. **Acta Metallurgica**, v. 21, n. 5, p. 571 – 574, 1973. ISSN 0001-6160. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616073900643>>.

MURA, T. **Micromechanics of defects in solids**. 2nd. ed. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1987. ISBN 90-247-3343-X.

MURA, T. The determination of the elastic field of a polygonal star shaped inclusion. **Mechanics Research Communications**, v. 24, n. 5, p. 473 – 482, 1997. ISSN 0093-6413. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0093641397000529>>.

NOZAKI, H.; TAYA, M. Elastic fields in a polygon-shaped inclusion with uniform eigenstrains. **Journal of Applied Mechanics**, v. 64, n. 3, p. 495–502, 1997.

OGIERMAN, W.; KOKOT, G. Mean field homogenization in multiscale modelling of composite materials. v. 61, p. 343–348, December 2013. Disponível em: <www.journalamme.org>.

RAHMAN, M. M. The isotropic ellipsoidal inclusion with a polynomial distribution of eigenstrain. **Journal of Applied Mechanics**, v. 69, n. 5, p. 593–601, 2002.

RODIN, G. J. Eshelby's inclusion problem for polygons and polyhedra. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 44, n. 12, p. 1977–1995, 1996. ISSN 0022-5096. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002250969600066X>>.

SORIANO, H. **Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2009. ISBN 9788573938807.

SORIANO, H.; LIMA, S. D. S. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas Vol. 48**. [S.l.]: EDUSP, 2003. ISBN 9788531407307.

TEIXEIRA, M. R. **Uma contribuição para a modelagem numérica da heterogeneidade do concreto com o método de Galerkin livre de elementos**. Tese-(Doutorado em Engenharia de Estruturas), 2011. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3144/tde-16052012-145155/>>.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. [S.l.]: McGraw-Hill book Company, 1951.

TORIL, A. J. **ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO**. Tese, 2012.

TSVELODUB, I. Y. The eshelby tensor. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, n. 74, p. 249–252, 2010. ISSN 0021-8928. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892810000687>>.

WEINBERGER, C.; CAI, W.; BARNETT, D. Elasticity of microscopic structures. Notas de aula da Stanford University. Setembro 2005.

WULF, J. et al. A finite element model of the stress field in a star-shaped inclusion. **Computational Materials Science**, v. 3, n. 4, p. 423 – 429, 1995. ISSN 0927-0256. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0927025694000830>>.

XU, B.; WANG, M. Special properties of eshelby tensor for a regular polygonal inclusion. **Acta Mechanica Sinica**, Springer-Verlag, v. 21, n. 3, p. 267–271, 2005. ISSN 0567-7718. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10409-005-0034-x>>.

YU, H. Y.; SANDAY, S. C.; CHANG, C. I. Elastic inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic solids. **Proceedings: Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society, v. 444, n. 1920, p. pp. 239–252, 1994. ISSN 09628444. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/52579>>.

ZHENG, Q.-S.; DU, D.-X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 49, n. 11, p. 2765 – 2788, 2001. ISSN 0022-5096. The Jean-Paul Boehler Memorial Volume. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509601000783>>.

ZHOU, K. et al. A review of the recent works on inclusions. v. 60, p. 144–158, 2013. ISSN 0167-6636. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663613000124>>.

ZOU, W. et al. Eshelby's problem of non-elliptical inclusions. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 58, n. 58, p. 346–372, 2010. ISSN 0022-5096. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509609001732>>.

ZOU, W.-N.; ZHENG, Q.-S. The second eshelby problem and its solvability. **Acta Mechanica Sinica**, The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics; Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, v. 28, n. 5, p. 1331–1333, 2012. ISSN 0567-7718. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10409-012-0139-y>>.

APÊNDICE A – MALHAS GERADAS - FRAÇÃO VOLUMÉTRICA

Neste anexo apresenta-se as malhas geradas pelo Método dos Elementos Finitos para as estruturas explícitas. A Tabela 31 contém a quantidade de nós e elementos referentes os testes realizados na seção Fração Volumétrica para os casos bidimensionais, onde todas as malhas tem refino igual a $1 \cdot 10^{-15}mm$.

Tabela 31- MALHAS REFENTE A FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CHAPA

Malha - Chapa com Inclusão Circular		60mm	84,6mm	120mm	169,8mm
Matriz	Nós	9453	7486	8771	9382
	Elementos	3102	2386	2825	3034
Inclusão	Nós	4952	5488	2647	1482
	Elementos	1526	1795	858	477

A Tabela 32 contém a quantidade de nós e elementos referentes os testes realizados na seção Fração Volumétrica para os casos tridimensionais, onde todas as malhas tem refino igual a 4mm.

Tabela 32- MALHAS REFENTE A FRAÇÃO VOLUMÉTRICA - CUBO

Malha - Chapa com Inclusão Esférica		60mm	75,6mm	95,4mm	120mm	151,2mm
Matriz	Nós	57051	73676	156475	318408	641597
	Elementos	37968	51014	13298	229165	465974
Inclusão	Nós	13182	13182	110995	13182	13298
	Elementos	9063	9063	9125	9063	9125

APÊNDICE B – MALHAS GERADAS - BIDIMENSIONAIS

Neste anexo são expostos as quantidades de nós e elementos gerados nas simulações de Elementos Finitos para os compósitos bifásicos idealizados com duas dimensões:

Tabela 33- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - CIRCULAR

Uma Inclusão Circular		1.T.1.B	1.F.2.B	1.F.1.B	1.C.1.B
Matriz	Nós	9382	9382	9382	9382
	Elementos	3102	3034	3034	3034
Inclusão	Nós	4952	1544	1544	1544
	Elementos	1526	497	497	497

Tabela 34- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - ELÍPTICA

Uma Inclusão Elíptica		1.T.1.B	1.F.2.B	1.F.1.B	1.C.1.B
Matriz	Nós	9437	9437	9437	9437
	Elementos	3053	3053	3053	3053
Inclusão	Nós	1328	1328	1328	1328
	Elementos	425	425	425	425

Tabela 35- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - POLIGONAIS

Uma Inclusão Poligonal		1.T.1.B	1.F.2.B	1.F.1.B	1.C.1.B
Matriz	Nós	9788	9788	9788	9788
	Elementos	553	553	553	553
Inclusão	Nós	3172	3172	3172	3172
	Elementos	168	168	168	168

Tabela 36- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS CIRCULARES

Duas Inclusões Circulares		2.T.1.B	2.F.2.B	2.F.1.B	2.C.1.B
Matriz	Nós	13962	13962	13962	13962
	Elementos	4529	4529	4529	4529
Inclusão	Nós	1122	1122	1122	1122
	Elementos	359	359	359	359
Inclusão	Nós	1122	1122	1122	1122
	Elementos	359	359	359	359

Tabela 37- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ELIPSES

Duas Inclusões Elípticas		2.T.1.B	2.F.2.B	2.F.1.B	2.C.1.B
Matriz	Nós	13956	13956	13956	13956
	Elementos	4525	4525	4525	4525
Inclusão	Nós	1023	1023	1023	1023
	Elementos	326	326	326	326
Inclusão	Nós	1023	1023	1023	1023
	Elementos	326	326	326	326

Tabela 38- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS POLÍGONOS

Duas Inclusões Poligonais		2.T.1.B	2.F.2.B	2.F.1.B	2.C.1.B
Matriz	Nós	13961	13961	13961	13961
	Elementos	4528	4528	4528	4528
Inclusão	Nós	520	520	520	520
	Elementos	157	157	157	157
Inclusão	Nós	529	529	529	529
	Elementos	160	160	160	160

Tabela 39- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CIRCULARES

Três Inclusões Circulares		3.T.1.B	3.F.2.B	3.F.1.B	3.C.1.B
Matriz	Nós	18340	18340	18340	18340
	Elementos	5946	5946	5946	5946
Inclusão	Nós	1492	1357	1492	1357
	Elementos	481	436	481	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436

Tabela 40- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELIPSES

Três Inclusões Elípticas		3.T.1.B	3.F.2.B	3.F.1.B	3.C.1.B
Matriz	Nós	18336	18336	18336	18336
	Elementos	5942	5942	5942	5942
Inclusão	Nós	1222	1222	1222	1222
	Elementos	391	391	391	391
Inclusão	Nós	1222	1222	1222	1222
	Elementos	391	391	391	391
Inclusão	Nós	1222	1222	1222	1222
	Elementos	391	391	391	391

Tabela 41- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS POLÍGONOS

Três Inclusões Poligonais		3.T.1.B	3.F.2.B	3.F.1.B	3.C.1.B
Matriz	Nós	18643	18643	18643	18643
	Elementos	6047	6047	6047	6047
Inclusão	Nós	496	496	496	496
	Elementos	149	149	149	149
Inclusão	Nós	514	514	514	514
	Elementos	155	155	155	155
Inclusão	Nós	508	508	508	508
	Elementos	153	153	153	153

APÊNDICE C – MALHAS GERADAS - TRIDIMENSIONAIS

Tabela 42- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ESFERA

Uma Inclusão Esférica		1.T.1.T	1.F.2.T	1.F.1.T	1.C.1.T
Matriz	Nós	9382	9382	9382	9382
	Elementos	3102	3034	3034	3034
Inclusão	Nós	4952	1544	1544	1544
	Elementos	1526	497	497	497

Tabela 43- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UMA ELIPSOIDE

Uma Inclusão Elipsoidal		1.T.1.T	1.F.2.T	1.F.1.T	1.C.1.T
Matriz	Nós	9437	9437	9437	9437
	Elementos	3053	3053	3053	3053
Inclusão	Nós	1328	1328	1328	1328
	Elementos	425	425	425	425

Tabela 44- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - UM CILINDRO

Uma Inclusão Cilíndrica		1.T.1.T	1.F.2.T	1.F.1.T	1.C.1.T
Matriz	Nós	9382	9382	9382	9382
	Elementos	3102	3034	3034	3034
Inclusão	Nós	4952	1544	1544	1544
	Elementos	1526	497	497	497

Tabela 45- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ESFERAS

Duas Inclusões Esféricas		2.T.1.T	2.F.2.T	2.F.1.T	2.C.1.T
Matriz	Nós	13962	13962	13962	13962
	Elementos	4529	4529	4529	4529
Inclusão	Nós	1122	1122	1122	1122
	Elementos	359	359	359	359
Inclusão	Nós	1122	1122	1122	1122
	Elementos	359	359	359	359

Tabela 46- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DUAS ELIPSOIDES

Duas Inclusões Elipsoidais		2.T.1.T	2.F.2.T	2.F.1.T	2.C.1.T
Matriz	Nós	13956	13956	13956	13956
	Elementos	4525	4525	4525	4525
Inclusão	Nós	1023	1023	1023	1023
	Elementos	326	326	326	326
Inclusão	Nós	1023	1023	1023	1023
	Elementos	326	326	326	326

Tabela 47- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - DOIS CILINDROS

Duas Inclusões Cilíndricas		2.T.1.T	2.F.2.T	2.F.1.T	2.C.1.T
Matriz	Nós	13962	13962	13962	13962
	Elementos	4529	4529	4529	4529
Inclusão	Nós	1122	1122	1122	1122
	Elementos	359	359	359	359
Inclusão	Nós	1122	1122	1122	1122
	Elementos	359	359	359	359

Tabela 48- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ESFERAS

Três Inclusões Esféricas		3.T.1.T	3.F.2.T	3.F.1.T	3.C.1.T
Matriz	Nós	18340	18340	18340	18340
	Elementos	5946	5946	5946	5946
Inclusão	Nós	1492	1357	1492	1357
	Elementos	481	436	481	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436

Tabela 49- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS ELIPSOIDES

Três Inclusões Elipsoidais		3.T.1.T	3.F.2.T	3.F.1.T	3.C.1.T
Matriz	Nós	18340	18340	18340	18340
	Elementos	5946	5946	5946	5946
Inclusão	Nós	1492	1357	1492	1357
	Elementos	481	436	481	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436

Tabela 50- MALHA DAS SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS - TRÊS CILINDROS

Três Inclusões Cilíndricas		3.T.1.T	3.F.2.T	3.F.1.T	3.C.1.T
Matriz	Nós	18340	18340	18340	18340
	Elementos	5946	5946	5946	5946
Inclusão	Nós	1492	1357	1492	1357
	Elementos	481	436	481	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436
Inclusão	Nós	1357	1357	1357	1357
	Elementos	436	436	436	436